АРХИМЕД

ИСЧИСЛЕНИЕ ПЕСЧИНОК

(ПСАММИТ)



АРХИМЕД

КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

И. И. АГОЛА, С. И. ВАВИЛОВА,
М. Я. ВЫГОДСКОГО, Б. М. ГЕССЕНА,
М. Л. ЛЕВИНА, А. А. МАКСИМОВА,
А. А. МИХАИЛОВА, И. П. РОЦЕНА,
А. Я. ХИНЧИНА

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΨΑΜΜΙΤΗΣ

ARCHIMEDIS ARENARIUS



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

АРХИМЕД

ИСЧИСЛЕНИЕ ПЕСЧИНОК
(ПСАММИТ)

ПЕРЕВОД,
КРАТКИЙ ОБЗОР РАБОТ
АРХИМЕДА
И ПРИМЕЧАНИЯ
ПРОФ. Г. Н. ПОПОВА



МОСКВА - ЛЕНИНГРАД
1932

Переплет, форзац, супер обложка и графическая орнаментация книги художника И. Ф. РЕРБЕРГА.

Редакционную работу по этой книге провел С. Е. АРШОН.

Оформление О. Н. ПЕРСИЯНИНОВОЙ.
Корректор А. Х. АРТЮХОВА.
Выпускающий Н. А. САХАРОВ.

Рукопись сдана в производство 19/III. Листы подписаны к печати в декабре. Книга вышла в свет в декабре в количестве 5000 экз. на бумаге формата 73×104/32, печатных знаков в листе 46 000 листов в книге 3 3/4. Индекс ТТ—126—5а—4. Заказ № 5036 ГТТИ 263. Уполномоченный Главлита Б—21339.

Фабрика книги «Красный пролетарий». Москва, Краснопролетарская, 16.

ПРЕДИСЛОВИЕ

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА.

На русском языке нет ни одной сколько-нибудь полной работы, знакомящей с ученой деятельностью Архимеда и значением его трудов в истории математики. Прочтите «Очерк истории физики» Розенбергера, «Историю физики» проф. Любимова, «Историю математики» проф. Ващенко-Захарченко,— везде фигурирует «легендарный» Архимед. Даже Шаль в своей «Истории геометрии» говорит об Архимеде вскользь. Наконец, Кэджори в «Истории элементарной математики» едва уделяет ему четыре страницы (этот недочет искупается, впрочем, дополнениями Тимченко).

Но истинный ореол славы не состоит из веры в баснословные и преувеличенные описания умственной мощи гения, и анекдотами нельзя охарактеризовать значение вкладов, сделанных им в сокровищницу человеческой мысли.

Только знакомство с тем, что действительно принадлежит гению, может дать ясное представление об его творческих способностях, его искусстве решать труднейшие проблемы, его проникновении в тайны науки, его виртуозности в изыскании методов исследования.

Для первого знакомства с Архимедом мы выбрали его небольшой арифметический трактат «Псаммит». По своему содержанию трактат этот не требует больших познаний в математике, и, во всяком случае, он легче, чем основные трактаты Архимеда, посвященные геометрии.

При переводе мы пользовались лучшим изданием сочинений Архимеда, содержащим греческий текст с латинским переводом проф. Гейберга.

Почти сто лет назад «Псаммит» был переведен на русский язык Ф. Петрушевским (в 1824 г.). Но эта книга представляет библиографическую редкость, а язык перевода, в общем довольно точного, слишком тяжел и архаичен.

Мы в своем переводе старались держаться возможно ближе к подлиннику в смысле точной передачи содержания; но, конечно, чисто внешние условия литературности формы заставили нас в некоторых местах уклониться от буквы подлинника, так как дословная передача без нужды затруднила бы чтение. Цель нашей работы требовала перевода, который, по возможности, читался бы легко, тем более, что построчный перевод был бы уместен только там, где приводится и подлинный текст.

Сведения об изданиях творений Архимеда мы даем в конце книги. Мы сочли, кроме того, необходимым предпослать переводу в качестве введения обзор трудов Архимеда. Затем мы присоединили комментарии, облегчающие понимание некоторых мест трактата.

Г. Н. ПОПОВ

КРАТКИЙ ОЧЕРК НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АРХИМЕДА

*



> «Vir stupendae sagacitatis, qui prima fundamenta posuit inventionum fere omnium, de quibus promovendis aetas nostra gloriatur».
>
> *Wallis* [1].

По свидетельству писателя Тцетцеса, знаменитый греческий метаматик Архимед прожил 75 лет, а так как он был убит при осаде Сиракуз римлянами, т. е. в 212 г. до нашей эры, то год его рождения 287 до нашей эры. Вот, в сущности, все данные для биографии этого замечательного человека, которыми мы располагаем. Кто были его родители, у кого он учился, где путешествовал, в каких условиях протекало его научное творчество—достоверно мы не знаем.

К великому счастью для науки, до нас дошли некоторые его произведения, и этого достаточно, чтобы сделать заключение: Архимед был гений. Одно

---

[1] Валлис (об Архимеде): «Человек сверхъестественной проницательности, кому мы обязаны в зародыше большей частью открытий, развитие которых покрыло славой переживаемую нами эпоху».

очевидно, что современники его это поняли, ему удивлялись, его почитали, и по смерти Архимеда имя его предстало позднейшим поколениям в ореоле легендарной славы. И до наших дней все любящие и понимающие науку произносят имя Архимеда с тем невольным почтением, которым проникается всякий, став лицом к лицу с проявлением исключительной гениальности.

Источником сведений о жизни и деятельности Архимеда была в древности биография, составленная Гераклитом и, к сожалению, утраченная. Кто был этот Гераклит — мы точно не знаем. Предполагают, что это был сын астронома Серапиона (II в. до н. эры). Писатели древности, сочинения которых дошли до нас, как-то: историк Тит Ливий, знаменитый римский писатель и оратор Цицерон, Диодор, Поливий, Плутарх и другие, сохранили нам ряд отрывочных данных, связать которые не представляется возможным, и, строго говоря, значительная часть этих рассказов анекдотического характера. Так как почти все они стали давно достоянием хрестоматий, учебников истории и популярных повествований, мы не будем здесь повторять их, считая достаточно известными.

В деле ознакомления с этой могучей интеллектуальной силой можно добиться успешных результатов, обратившись к его духовному наследию. С этой целью мы вкратце разберем содержание всех дошедших до нас произведений Архимеда, а одно из них мы предлагаем читателям в виде полного перевода, тем более, что тогда набившие всем оскомину легенды и анекдоты станут понятней, приобретут,

так сказать, почву для оправдания своего возникновения и более чем двухтысячелетнего существования.

До нас дошли следующие творения Архимеда:

1. «ἐπιπέδων ἰσορροπικῶν, κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων» «De aequiponderantibus» — «О равновесии плоских фигур и центре тяжести» (2 книги).

2. «τετραγωνισμος τᾶς ὀρθογωνίου τομᾶς» — «Quadratura parabolis» — «Квадратура параболы».

3. «περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, α, β» — «De Sphaera et Cylindro» — «О шаре и цилиндре» (2 книги).

4. «περὶ ἑλικῶν» — «De lineis spiralibus — «О спиралях».

5. «περὶ κωνοειδέων καὶ σχηματων σφαιρειδέων» — «De conoidibus et sphaeroibius» — «О коноидах и сфероидах».

6. «κυκλου μέτρησις» — «Circuli dimensio» — «Измерение круга».

7. ψαμμίτης» — «De arenae numero» — «Исчисление песчинок».

8. «περὶ ὀχουμένων» — «De insidentibus in fluido» — «О плавающих телах».

9. «ἐφοδικόν» — руководство (вновь открытое сочинение).

10. «λημμάτα» — «Lemmata» — «Леммы».

11. «στομμαιον» — «Zoculus» — род геометрической головоломки.

Но нельзя думать, что все перечисленные сейчас сочинения подлинные и целиком принадлежащие Архимеду. Сам он писал на дорийском наречии, между тем книги «О шаре и цилиндре» и «Эфодик» дошли

до нас в позднейшей переработке на обычном греческом языке. Книга «О плавающих телах», до открытия проф. Гейбергом палимпсеста с «Эфодиком», была известна только по латинскому переводу, «Леммы» дошли в арабской рукописи, от книги «Стомахион» дошли только отрывки на греческом и арабском языках, наконец, за исключением «Псаммита», во всех трактатах имеются вставки более позднего происхождения. Приходится ли этому удивляться? Наоборот, только исключительная и общепризнанная научная ценность спасла от забвения труды, за которыми числится более чем двухтысячелетняя давность.

От многих древних авторов до нас дошли или скудные отрывки, или отдельные цитаты, а от некоторых лишь одни имена.

Повидимому, часть сочинений Архимеда исчезла совершенно бесследно, например трактат «О конических сечениях» или «Арифметика», о которой сам Архимед упоминает в «Псаммите».

Будем благодарны относительно благоприятно сложившейся исторической обстановки и за то, чем мы располагаем в настоящее время. Но исследователь не должен терять надежды. В западноевропейских книгохранилищах имеется еще непочатый край неисследованных рукописей. Достаточно вспомнить библиотеку Эскуриала. И, наконец, на примере проф. Гейберга, как увидим ниже, ясно, что пытливость ученого и счастливая случайность могут обогатить науку прекрасными открытиями.

Перейдем теперь к обзору сочинений Архимеда в последовательности, диктуемой, с одной стороны, их внутренней связью, а с другой — конечной целью настоящего введения, вследствие чего о «Псаммите» мы будем говорить в самом конце.

Сначала мы рассмотрим трактаты геометрического характера, затем труды по механике и завершим наш обзор арифметикой.

ИЗМЕРЕНИЕ КРУГА

Этот замечательный трактат, едва в пять печатных страниц, представляет классический образец сжатого и строгого изложения и блестящего решения задачи об определении длины окружности и площади круга.

Трактат начинается с доказательства следующего предложения: «каждый круг равен прямоугольному треугольнику, если радиус равен одной из сторон, заключающих прямой угол, а окружность равна основанию». Доказательство ведется приемом «reductio ad absurdum». Сначала Архимед допускает, что круг больше этого треугольника, потом, что он меньше его. Приходя в обоих случаях к нелепости, Архимед заключает о верности утверждаемого.

Второе предложение гласит: «круг относится к квадрату своего диаметра приблизительно, как 11 к 14». Оно основывается в сущности на третьем и последнем предложении: «Длина окружности превышает утроенный диаметр менее чем на одну

седьмую, но более чем на десять семьдесят первых диаметра». Другими словами, Архимед доказывает, что

$$3\frac{1}{7} > \frac{C}{D} > 3\frac{10}{71},$$

где C — длина окружности, а D — ее диаметр. Для верхней границы Архимед последовательно выражает через диаметр периметры описанных многоугольников, до девяностошестиугольника включительно. Для нижней границы он в том же порядке берет многоугольники вписанные.

Таким образом получено знаменитое архимедово приближение для π, равное, как известно всем школьникам, $\frac{22}{7}$. Ввиду крайней простоты им чаще всего и пользуются, когда не требуется особой точности, хотя нижняя граница ближе к действительному значению:

$$3\frac{1}{7} = 3{,}14285\ldots$$

$$\pi = 3{,}14159\ldots$$

$$3\frac{10}{71} = 3{,}14084\ldots$$

Чтобы оценить предложенный Архимедом метод вычисления длины окружности путем сближения границ, между которыми она заключается, через сравнение периметров вписанных и описанных многоугольников, надо вспомнить, что только более совершенные методы анализа бесконечно-малых вытеснили способ Архимеда, которым пользовались более 1800 лет!

Интересно, что Архимеду пришлось в процессе вспомогательных вычислений иметь дело с извлечением квадратных корней, причем он не знал ни десятичной индусской нумерации, ни десятичных дробей. Около этого вопроса возникла целая литература, так как ни сам Архимед, ни его комментатор Эвтокий ничего об этом не говорят. Все видные историки математики [Нессельман, Кантор (Поль) Таннери, З. Гюнтер, Гейберг] указывают на то, что полученные Архимедом результаты таковы, как будто он пользовался алгоритмом непрерывных дробей.

Так, например, в одной из работ, Архимеду предстояло найти отношение двух отрезков, которое в действительности равнялось $\sqrt{3}:1$.

Архимед дает ответ в виде дроби $\frac{265}{153}$. Иначе говоря, он получает

$$\sqrt{3}=\frac{265}{153}.$$

Полученное Архимедом значение не случайно. В самом деле. Разлагая $\sqrt{3}$ в непрерывную дробь, имеем:

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}},$$

Вычисляя девятую подходящую дробь, получим для $\sqrt{3}$ значение, данное Архимедом, т. е. $\frac{265}{153}$.



Вместе с тем известны и следующие факты:

Профессор Тибо, работая в Бенаресе, изучая древние памятники индусской науки (так называемую «Ведическую геометрию») по сборникам, носящим название «Sulvasutras» и содержащим правила относительно постройки жертвенников, их ориентации, формы, размеров, поверхности и объема, встретил в них приближенное значение для $\sqrt{2}$ в виде такой суммы:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}.$$

В 1879 г. русский математик Н. Алексеев изложил в «Bulletin de la Société Mathématique de France» способ извлечения квадратных корней, который может быть назван «способом двух средних». Не вдаваясь в подробности, мы заметим только, что этим способом получается для $\sqrt{2}$ приближенное значение, данное индусами, из чего можно с некоторой вероятностью вывести, что этот способ был известен индусским математикам — искусным алгебраистам и калькуляторам.

Знаменитый исследователь и математик, ориенталист Bònke приводит ряд веских аргументов в пользу того, что за три века до нашей эры греки могли ознакомиться с математическими знаниями индусов, и что указанный способ мог быть небезызвестным Архимеду.

Если применить метод двух средних к вычислению $\sqrt{3}$, получим ряд приближенных значений: с избытком $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{97}{56}$; с недостатком $\frac{3}{2}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{168}{97}$.

Здесь мы не видим архимедова приближения, но если сложить почленно два последних приближения, то получим:

$$\frac{97+168}{56+97}=\frac{265}{153}.$$

Возможно, таким образом, что Архимед пользовался смешанным методом: «двух средних» и «методом медиации» [1].

---

[1] Сущность последнего очень проста: если даны две неравные дроби $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$, то дробь, происходящая от почленного сложения числителей и знаменателей, всегда, как известно, имеет промежуточное значение.

Так, если

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2},$$

то

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}<\frac{a_2}{b_2}.$$

Действительно: из условия следует, что

$$a_1b_2<a_2b_1;$$

прибавив обеим частям неравенства по $a_1 b_1$, имеем:

$$a_1b_1+a_1b_2<a_1b_1+a_2b_1,$$

откуда

$$a_1(b_1+b_2)<b_1(a_1+a_2)$$

и, следовательно,

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}.$$

Аналогично доказывается, что

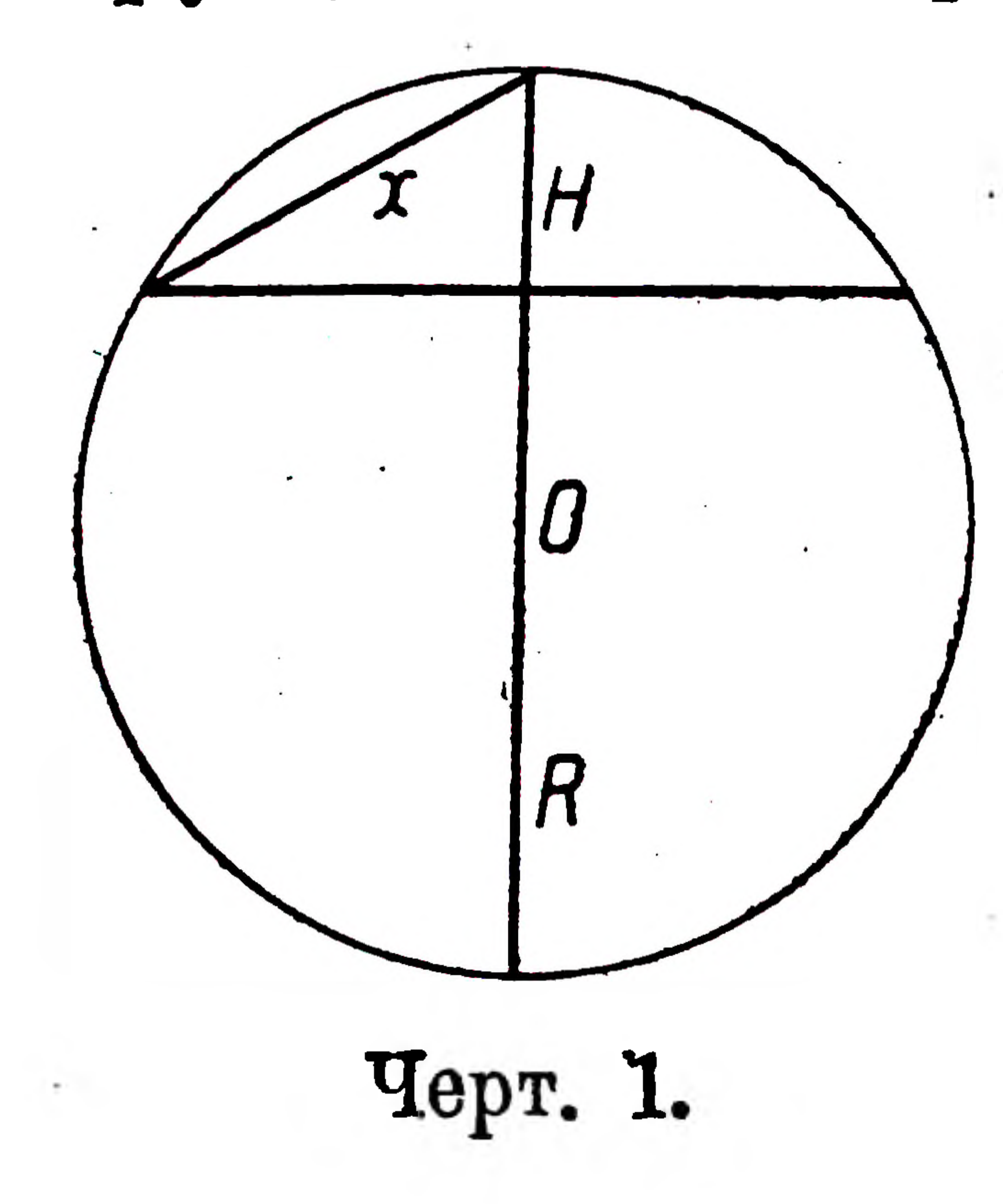
$$\frac{a_2}{b_2}>\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}.$$

О ШАРЕ И ЦИЛИНДРЕ

В этом трактате Архимед имеет целью, как сам указывает во введении, доказать три следующих предложения:

1. Поверхность шара в четыре раза больше площади большого круга.

2. Поверхность шарового сегмента равна площади круга, имеющего радиусом прямую, проведенную от вершины сегмента к окружности, служащей ему основанием.



Черт. 1.

3. Цилиндр, имеющий основанием большой круг шара, а высотой его диаметр (т. е. цилиндр, описанный около шара), имеет объем, равный трем вторым объема, и поверхность, равную трем вторым поверхности шара.

В наше время предложение 2 формулируется обычно так: поверхность шарового сегмента равна площади круга, радиус которого есть хорда образующей дуги сегмента.

В самом деле. Если поверхность сегмента S, то как известно (черт. 1),

$$S = 2\pi R \cdot H,$$

но из чертежа имеем:

$$2R \cdot H = x^2,$$

и значит;

$$S = \pi x^2.$$

Третьему предложению сам Архимед, повидимому, придавал исключительное значение. По крайней мере предание гласит, что Архимед высказал своим ближайшим друзьям пожелание, чтобы это открытие было отмечено на его надгробном памятнике путем изображения цилиндра с вписанным в него шаром. Цицерон рассказывает, что, посетив Сицилию, он нашел гробницу Архимеда только по этому изображению.

Помимо отмеченных трех предложений заслуживает внимания своеобразное выражение для поверхностей цилиндра и конуса, которые дает Архимед в этом трактате.

Поверхность прямого цилиндра без площадей оснований (т. е. боковая поверхность) равна площади круга, радиус которого есть средне-пропорциональное между производящей цилиндра и диаметром его основания.

Действительно. По известной формуле имеем:

$$S = 2\pi R \cdot H.$$

Если взять отрезок x так, что

$$H : x = x : 2R,$$

то

$$x^2 = 2RH$$

и

$$S = \pi x^2.$$

Поверхность прямого конуса без площади основания равна площади круга, радиус которого есть

средне-пропорциональное между производящей конуса и радиусом его основания. Иначе говоря, для поверхности Архимед дает формулу:

$$S = \pi x^2,$$

где

$$X^2 = Rl,$$

то есть

$$l : x = x : R.$$

Кроме того, он дает предложения относительно объема шара и сферического сектора и ряд задач. Например, «по данному конусу или цилиндру найти шар, имеющий объем, равный объему данного конуса или цилиндра». «Построить сферический сегмент, подобный одному данному и равный другому, тоже данному сегменту». Весьма интересна задача: «пересечь шар плоскостью так, чтобы объемы полученных сегментов находились в данном отношении».

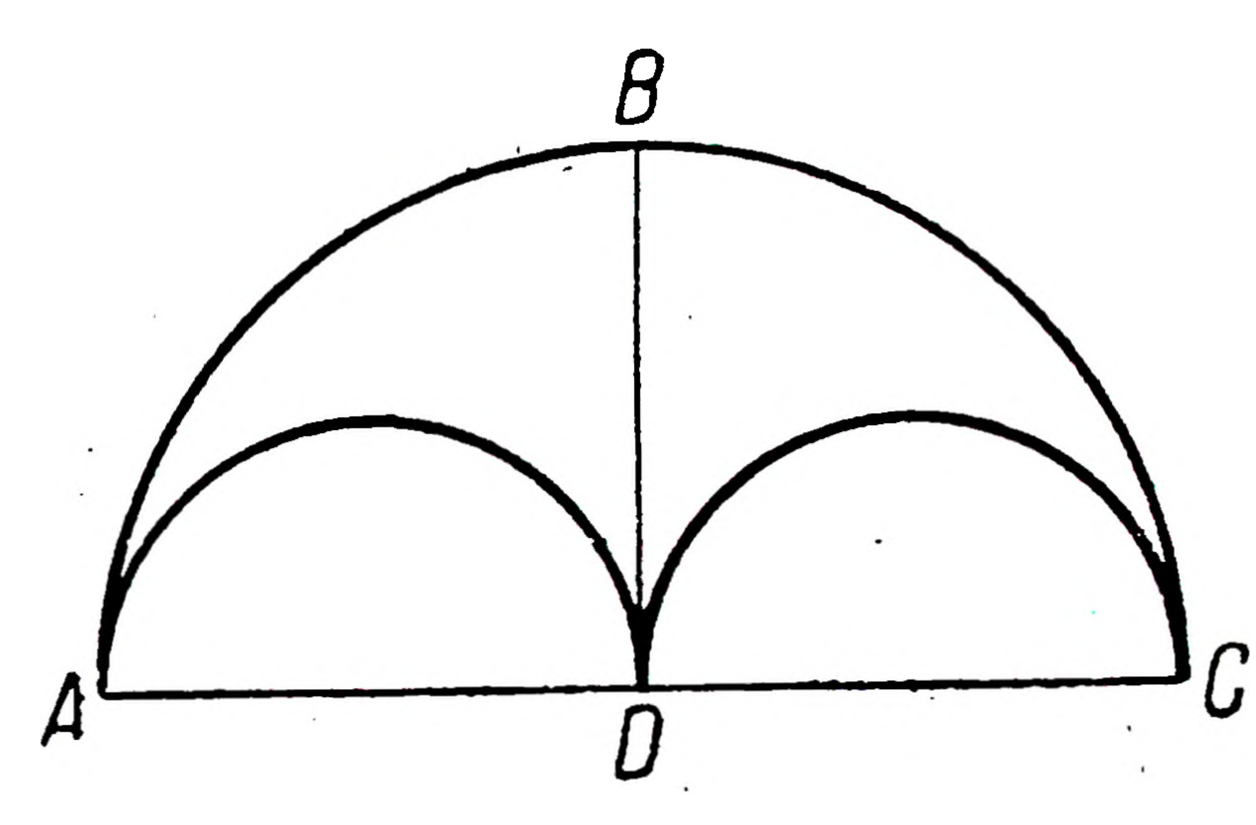
Если приравнять отношение объемов обоих сегментов данному числу, то для отыскания высоты одного из сегментов приходится решать уравнение третьей степени, корни которого, как известно, нельзя построить с помощью циркуля и линейки, т. е. пользуясь при построении только прямыми и дугами круга. Сам Архимед построения не дает, но если он решил эту задачу, то только с помощью конических сечений.

ЛЕММЫ

Как мы уже указывали, это маленькое сочинение дошло до нас только в арабском тексте. Впервые переведено на латинский Гривсом и Фостером в

1659 г. (Hemmata Archimedis); второй перевод, в 1661 г., А. Барелли с комментариями Ал-Мохтасса, Абул-Гассана и Абуль Сагал-ал-кухи. Манера изложения мало напоминает их автора: вероятно, текст утраченного оригинала подвергался искажениям или, может быть, позднейшей обработке. Кантор исследовал вопрос о том, какие именно леммы можно считать принадлежащими Архимеду, но все-таки вопрос остается открытым.

Весь трактат состоит из 15 предложений. Мы приведем текст трех из них, чтобы дать знакомство с характером разбираемых вопросов.



Черт. 2.

Лемма IV. Пусть ABC—полукруг. На его диаметре построены два равных полукруга AD и DC. Пусть DB—перпендикуляр к AC. Фигура, полученная таким построением и ограниченная большой полуокружностью и двумя малыми, называется арбелон (секирка).

Площадь арбелона равна площади круга, имеющего диаметром перпендикуляр DB (черт. 2).

Действительно: площадь $ABC = \frac{\pi \cdot BD^2}{2}$.

Сумма площадей (AD и DC) дает круг диаметра BD, следовательно, равна $\pi \cdot \frac{BD^2}{4}$.

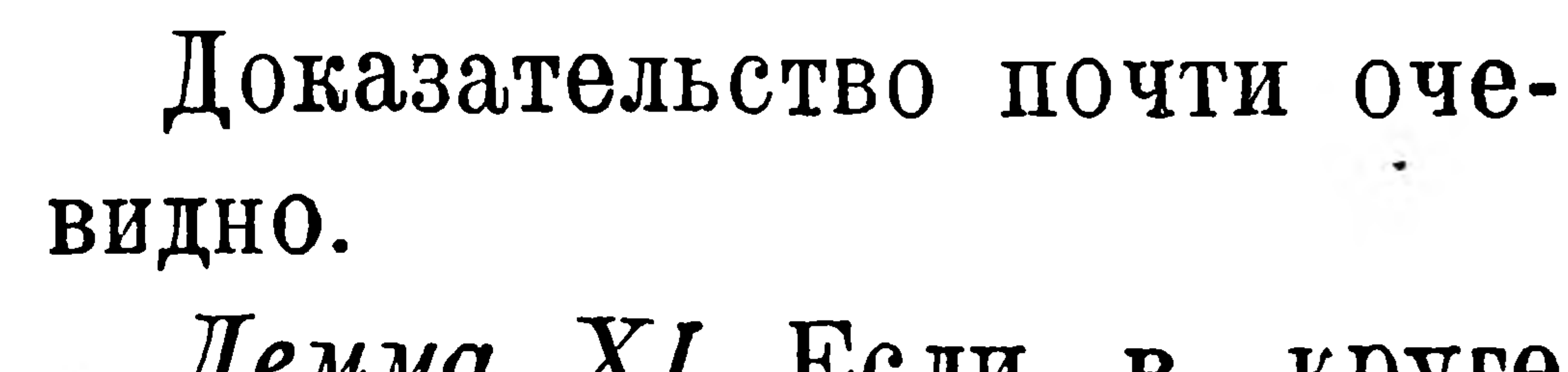
Площадь арбелона равна их разности:

$$\frac{\pi \cdot BD^2}{2} - \frac{\pi \cdot BD^2}{4} = \pi \cdot \frac{BD^2}{4}.$$

Лемма VII. Если круг описан около квадрата, а другой в него вписан, то описанный круг вдвое больше вписанного.

Доказательство почти очевидно.

Лемма XI. Если в круге две хорды AB, CD пересекаются под прямым углом в точке E, которая не есть центр, то сумма квадратов отрезков AE, BE, EC, ED равна квадрату диаметра (черт. 3).



Черт. 3.

Решение предоставляем читателям. Интересно что некоторые леммы встречаются у индусского математика Брамегупты (VI в. нашей эры).

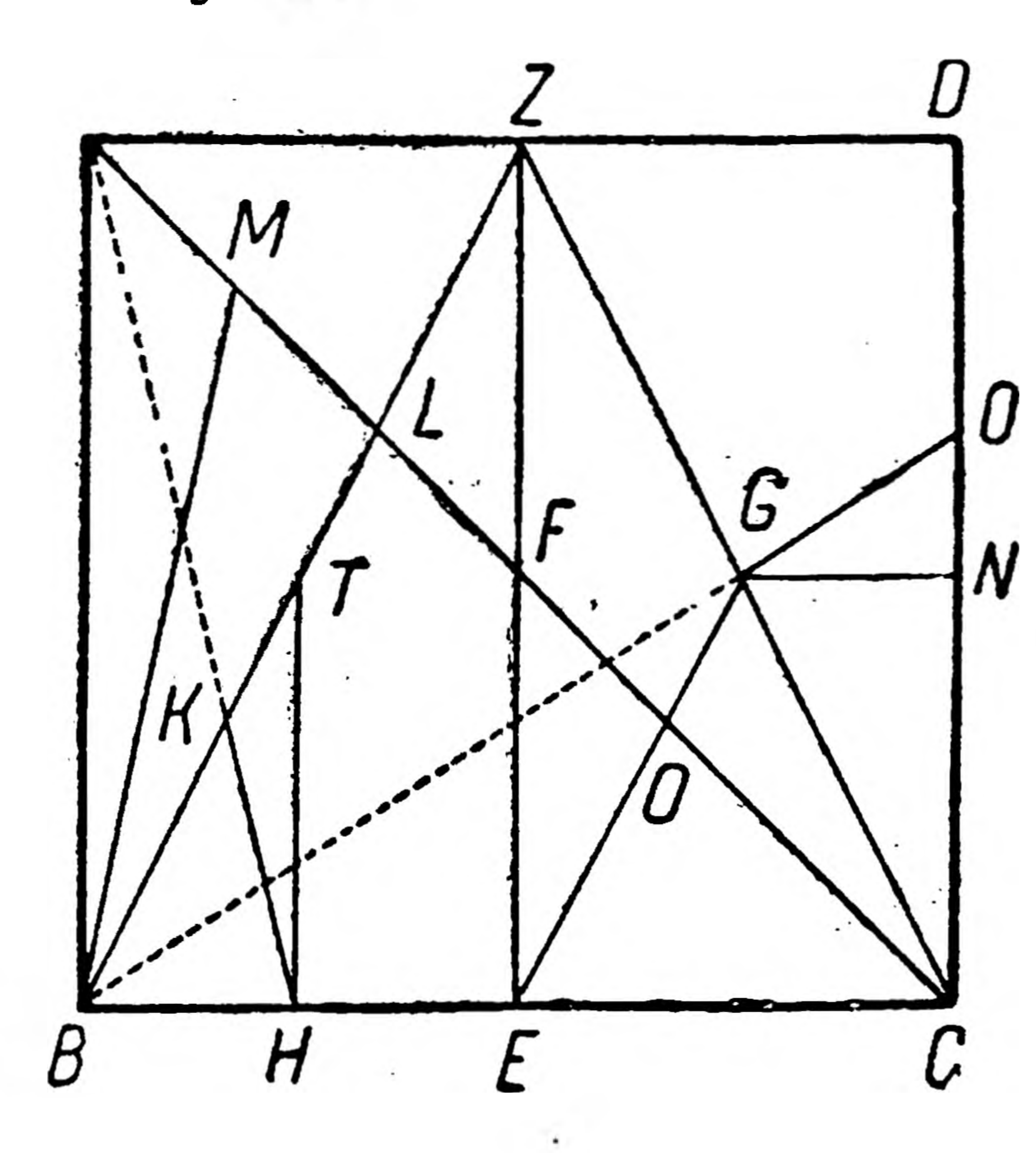
LOGULUS ARCHIMEDIUS

Латинские писатели Марий Викторин (IV в. нашей эры) и Атилий Фортунациан указывают, что Архимеду принадлежит следующая задача. Дан квадрат из слоновой кости, разрезанный на 14 многоугольников различной формы; из этих кусков требуется составить не только первоначальный квадрат, но также и другие фигуры. Вопрос о причастности Архимеда к этой игре был неясен до 1899 г., когда историк математики Зутер нашел арабский текст, гласящий: разрезать квадрат на 14 частей, площади которых находились бы в рациональных отношениях к площади всей фигуры. Задачу эту Архимед называет

«στομάχιον» (собрание отрезков). Постановка вопроса как видим, более научна и не совпадает с латинской версией. Открытие проф. Гейбергом в 1906 г. константинопольского палимпсеста подтвердило догадки о принадлежности этой задачи Архимеду, так как рукопись содержит начало трактата «στομάχιον».

Указанная задача допускает множество решений. Вот как решает ее сам Архимед.

Пусть в квадрате $ABCD$ (черт. 4) точки E, N, Z середины сторон CB, CD и DA. Проведем прямые ZE, ZB, ZC и AC. Прямая AC пересекается в точках L и F с прямыми ZB и ZE. Соединим точку B с серединой M отрезка AL, точку E с серединой G отрезка ZC и точку G с N. Наконец на прямой, проходящей через середину H отрезка BE и через точку A, возьмем отрезок HK, отсеченный прямой ZB. Через точку H и через середину T прямой BZ проведем прямую HT. На прямой, проходящей через точки G и B, возьмем отрезок GO, ограниченный прямыми ZC и DC. Квадрат $ABCD$ разделится на 14 частей, из которых 7 находятся в прямоугольнике ZB и 7 в прямоугольнике ZC, и все эти части, как мы покажем, удовлетворяют поставленным требованиям. Так, если площади этих частей выразить в сорок вось-



Черт. 4.

мых долях всей площади, то каждая из них будет иметь размер, обозначенный на чертеже 5.

Доказательство. Обозначим площадь всего квадрата буквой S.

I. Прямоугольник ZC.

1) $\triangle GNC = \frac{1}{4} \triangle CDZ = \frac{1}{16} S.$

2) Так как $BC = 4GN$, то $OC = 4ON$, $NC = 3ON$, следовательно,

$$\triangle GNO = \frac{1}{3} \triangle GNC = \frac{1}{48} S.$$

3) Площадь четырехугольника $DOGZ$ равна

$$\triangle DCZ - (\triangle GNC + \triangle GNO) = \frac{1}{4} S - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{48}\right) S = \frac{1}{6} S.$$

4, 5 и 6) $\triangle EFQ = \frac{1}{24} S$, $\triangle GQC = \frac{1}{24} S$ и $\triangle ECQ = \frac{1}{12} S.$

Действительно, из подобия треугольников FGQ и CEQ следует:

$$\frac{FG}{EC} = \frac{1}{2} = \frac{GQ}{EQ} = \frac{FQ}{CQ},$$

откуда

$$\triangle EFQ = \frac{1}{2} \triangle ECQ = \triangle GCQ,$$

$$\triangle EFQ = \frac{1}{3} \triangle EFC.$$

Но

$$\triangle EFC = \frac{1}{2} \triangle ZEC = \frac{1}{8} S,$$

следовательно,

$$\triangle EFQ = \triangle GQC = \frac{1}{24} S \quad \text{и} \quad \triangle ECQ = \frac{1}{12} S.$$

7) Площадь четырехугольника $FQGZ$ равна:

$$\triangle ZEG - \triangle EFQ = \frac{1}{8}S - \frac{1}{24}S = \frac{1}{12}S.$$

II. Прямоугольник ZB.

1) $\triangle FZL = \triangle EFQ = \frac{1}{24}S.$

2) $\triangle KHT = \frac{1}{48}S.$

Действительно, из подобия треугольников KHT и KBA следует:

$$\frac{HT}{BA} = \frac{1}{2} = \frac{KT}{BK},$$

откуда

$$\triangle KHT = \frac{1}{2}\triangle BHK = \frac{1}{3}\triangle BHT =$$

$$= \frac{1}{12}\triangle BEZ = \frac{1}{48}S.$$

3) $\triangle BHK = 2\triangle KHT = \frac{1}{24}S.$

4) $\triangle ALZ = \frac{1}{12}S$, так как треугольники ALZ и ECQ равны.

5, 6) $\triangle ABM = \triangle LBM = \frac{1}{12}S.$

Действительно:

$$BC = 2AZ,$$

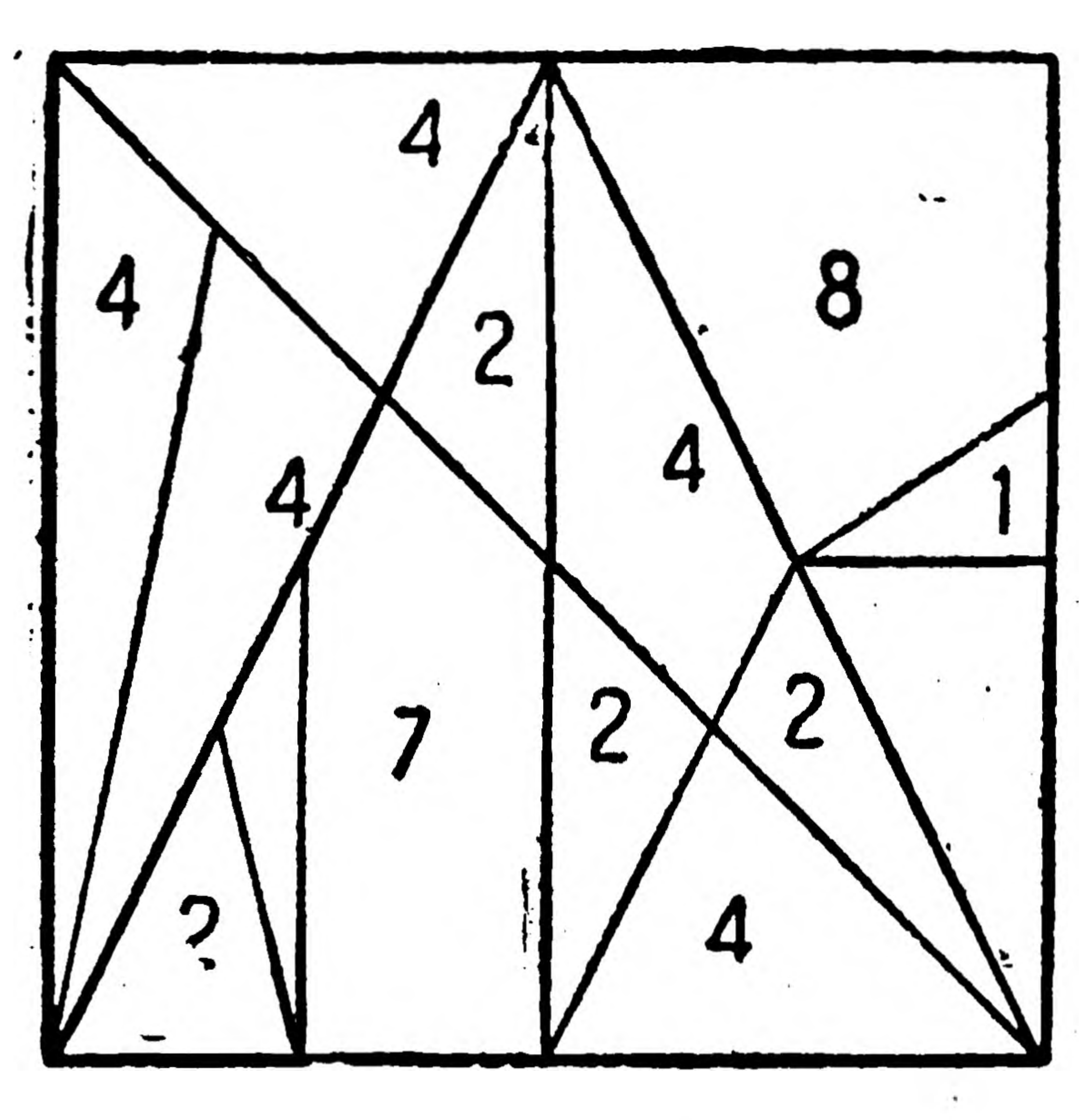
следовательно,

$$BL = 2LZ \text{ и } \triangle LAB = 2\triangle ALZ = \frac{1}{6}S.$$

поэтому

$$\triangle ABM = \triangle LBM = \frac{1}{2}\triangle LAB = \frac{1}{12}S.$$

7) Площадь треугольника $LFEHT$ равна площади трапеции $ZEHT - \triangle FZL = \frac{3}{3}\triangle BEZ - \triangle FZL =$ $= \frac{3}{16}S - \frac{1}{24}S = \frac{7}{48}S.$



Черт. 5.

Черт. 5 показывает размеры площадей отдельных частей в сорок восьмых долях всей площади.

(Приведенное построение и полученные результаты справедливы для всякого параллелограма).

КВАДРАТУРА ПАРАБОЛЫ

Трактат этот в подлиннике называется «Сечение прямоугольного конуса». Дело в том, что, судя по отрывку из сочинения греческого математика Гемина (I в. до н. эры), сохраненного нам Эвтокием в его комментариях к «Коническим сечениям» Аполлония, первым из геометров, изучившим сечения конуса плоскостью, был Менехм, ученик Платона. При этом сечения получены им не на одном конусе, а на трех. Если угол при вершине осевого сечения конуса был острый, то плоскость, перпендикулярная к образующей, давала в сечении с конусом эллипс. При тупом угле получалась гипербола и, наконец, при прямом — парабола. Отсюда понятно название трактата Архимеда. И в этом последнем и в трактате «О коно-

идах и сфероидах» он делает ссылки на сочинение, озаглавленное «Конические сечения», без упоминания автора, что он делал только тогда, когда ссылался на собственные произведения. Отсюда с некоторой вероятностью можно вывести, что Архимед написал такое сочинение, до нас не дошедшее. Это вполне возможно, так как только что упомянутые два трактата предполагают в их авторе основательное знакомство со свойствами конических сечений.

Во введении к трактату «Квадратура параболы» мы встречаемся с началом, которое лежит в основе «метода исчерпывания». «Для доказательства предложения, — говорит Архимед, — я пользуюсь следующей леммой: если две площади неравны, то всегда возможно последовательным приложением их разности к самой себе получить такую площадь, которая превосходила бы произвольно данную конечную площадь». И прежние геометры употребляли эту лемму. Помощью ее они доказали, что площади кругов находятся в отношении квадратов их диаметров, что объемы шаров находятся в отношении кубов их диаметров, далее, что всякая пирамида составляет одну треть призмы одного основания и одной высоты с ней, и что всякий конус составляет одну треть цилиндра одного основания и одной высоты с ним. Все это они доказали помощью упомянутой леммы.

Это положение, повидимому, впервые получило применение в школе Платона и развито Эвдоксом

(ум. в 357 г. до нашей эры). Отвлекаясь от геометрического содержания леммы, можно формулировать ее так: «разность двух однородных величин можно повторить столько раз, что полученная сумма превзойдет каждую из данных величин». Метод исчерпывания, основанный на применении этой леммы, заменял древним геометрам, и в особенности Архимеду, пользовавшемуся им с замечательным искусством, метод бесконечно-малых нового времени.

В трактате «Квадратура параболы» Архимед доказывает следующее предложение [1]: «площадь параболического сегмента равна $^4/_3$ площади треугольника, имеющего основанием хорду сегмента, а высотой — высоту этого сегмента».

Если через середину хорды параболы проведена прямая, параллельная ее оси, а в точке пересечения этой параллельной с кривой построена касательная, то эта касательная параллельна хорде. Следовательно, перпендикуляр, опущенный из точки касания на хорду, больше перпендикуляра, опущенного из всякой другой точки дуги сегмента на его хорду: это высшая точка сегмента; расстояние ее от хорды и есть высота сегмента. Отсюда Архимед выводит, что треугольник, имеющий основанием хорду сегмента, а высотой его высоту, больше половины сегмента. Таким образом площадь сегмента больше площади треугольника, но меньше его двойной площади. Если в меньшие сегменты, отсекаемые боковыми сторонами треугольника, опять вписать

[1] Всех предложений в трактате двадцать четыре.

треугольники наибольшей площади, то каждый из них больше половины своего сегмента (но меньше всего сегмента), и сумма их площадей составляет $^1/_4$ площади первоначального треугольника. Поэтому площадь данного сегмента больше $1^1/_4$, но меньше $1^1/_2$ площади вписанного в него треугольника. Путем подобных рассуждений, вписывая треугольники в постепенно уменьшающиеся сегменты, Архимед приходит к заключению, что площадь сегмента не может быть больше $^4/_3$, но не может быть и меньше $^4/_3$ треугольника, имеющего те же основание и высоту [1].

---

[1] Методами интегрального исчисления, как известно, этот результат получается крайне просто. Площадь треугольника MOM_1 (черт. 6), вписанного в параболический сегмент, очевидно, есть xy. Площадь полусегмента MOP выражается интегралом

$$\int_0^x y\,dx.$$

Черт. 6.

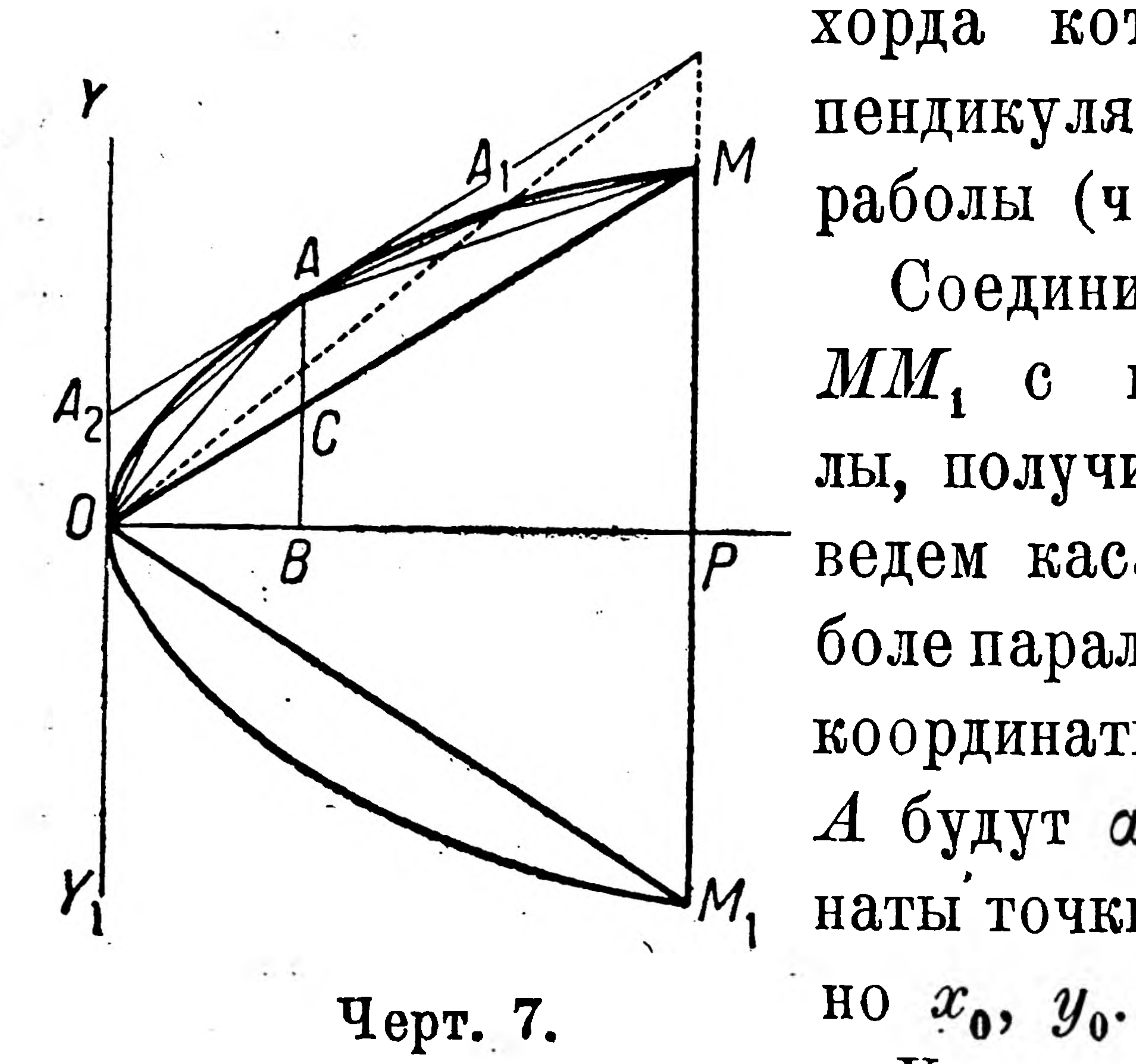
Так как уравнение параболы $y^2 = 2px$, то

$$\int_0^x \sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\cdot x\sqrt{x} =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{2px} = \frac{2}{3}xy,$$

а целый сегмент вдвое больше, т. е. $\frac{4}{3}xy$.

Чтобы понять рассуждения Архимеда, переведем их на язык современной математической символики. Имеем параболический сегмент MOM_1, хорда которого MM_1 перпендикулярна оси OX параболы (черт. 7).



Черт. 7.

Соединив концы хорды MM_1 с вершиной параболы, получим $\triangle MOM_1$. Проведем касательную к параболе параллельно OM. Пусть координаты точки касания A будут α и β, а координаты точки M соответственно x_0, y_0.

Уравнение прямой OM, как проходящей через точки O и M, напишется так:

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0) = \frac{2py_0}{2px_0}(x - x_0) = \frac{2py_0}{y_0^2}(x - x_0),$$

потому что, по уравнению наработы, $y_0^2 = 2px_0$.

Тогда по сокращении

$$y - y_0 = \frac{2p}{y_0}(x - x_0).$$

Уравнение касательной AT будет:

$$y - \beta = \frac{p}{\beta}(x - \alpha).$$

Раз хорда OM и касательная AT параллельны, их угловые параметры равны, т. е.

$$\frac{2p}{y_0} = \frac{p}{\beta},$$

откуда

$$\beta = \frac{y_0}{2}.$$

Но $2pa = \beta^2$ или

$$2pa = \frac{y_0^2}{4} = \frac{2px_0}{4},$$

следовательно,

$$a = \frac{x_0}{4}.$$

Соединив точку A с концами O и M хорды OM, получим $\triangle OAM$. Сравним его с треугольником OMP. Продолжив для этого MM_1 до пересечения с касательной в точке T, соединим точки O и T. Ясно, что пл. $\triangle OAM =$ пл. $\triangle OTM$. Так как $\triangle OTM$ и $\triangle OPM$ имеют одну и ту же высоту, то площади их относятся, как основания:

$$\frac{\text{площ.}\ \triangle OTM}{\text{площ.}\ \triangle OPM} = \frac{MT}{MP}.$$

Но $MT = AC$ и $\triangle OBC \backsim \triangle OPM$; так как

$$OB = a = \frac{x_0}{4},\ \text{то}\ BC = \frac{PM}{4} = \frac{y_0}{4},$$

следовательно,

$$AC = AB - BC = \beta - \frac{y_0}{4} = \frac{y_0}{2} - \frac{y_0}{4} = \frac{y_0}{4}$$

теперь

$$\frac{\text{площ.}\ \triangle OTM}{\text{площ.}\ \triangle OPM} = \frac{y_0}{4MP} = \frac{y_0}{4y_0} = \frac{1}{4}.$$

Итак, треугольник, вписанный в сегмент OAM, составляет одну четверть основного треугольника OMP. Хорды OA и AM отсекают два малых сегмента. Можно в каждом провести касательную

(точки касания A_1 и A_2), параллельную основанию соответствующего сегмента, и, повторяя те же вычисления, найдем, что сумма треугольников OA_2M и AA_1M составит:

$$\frac{1}{4}\triangle OAM=\frac{1}{16}\triangle OPM=\frac{1}{4^2}\triangle OPM.$$

Повторяя построение еще раз, найдем, что сумма площадей треугольников, вписанных во вновь образовавшиеся меньшие сегменты, составит одну четверть от предыдущей, т. е. $\frac{1}{4^3}\cdot\triangle OPM$. Очевидно, что этот процесс «исчерпывания» площади можно продолжить как угодно далеко. И чем больше будет указанных построений, тем ближе сумма всех треугольников к площади вмещающего их полусегмента OPM. Обозначив его площадь через Σ, а площадь основного $\triangle OPM$ через S, получим:

$$\Sigma=S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{4^2}S+\frac{1}{4^3}S+\ldots=$$
$$=S\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots\right).$$

Но в скобках — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая, очевидно, равна $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$, следовательно, $\Sigma=\frac{4}{3}S$, а так как весь сегмент $OMM_1=2\Sigma$, а весь треугольник $OMM_1=2S$, то данный параболический сегмент составляет $\frac{4}{3}$ треугольника, имеющего основание и высоту, одинаковые с сегментом.

Архимед, идя указанным выше путем исчерпывания, но не имея в распоряжении ресурсов современной математики, получает, тем не менее, тот же результат в виде бесконечного ряда и правильно его суммирует. Вот что говорит он сам, обращаясь к другу своему Досифею, по поводу полученного результата: «Многие из занимавшихся геометрией еще прежде меня хотели найти прямолинейную фигуру, площадь которой равнялась бы площади круга или площади кругового сегмента. Они пробовали это также относительно эллипса, но они полагали в основание своих изысканий трудно допустимые предложения. Но я никого не знаю, кто искал бы прямолинейную фигуру, площадь которой равнялась бы площади параболического сегмента. Я это сделал в настоящее время, показав, что площадь такого сегмента равна четырем третям площади треугольника, имеющего с сегментом одинаковые основание и высоту».

О КОНОИДАХ И СФЕРОИДАХ

Большой трактат этот начинается обращением Архимеда к Досифею.

«В этой книге я посылаю тебе не только доказательства, которые не были мною присланы, но также доказательства других открытых мною теорем, которые долго не давали мне покоя, потому что, исследуя их несколько раз, я нашел в них много трудностей. Вот почему эти теоремы не

были сообщены вместе с другими. Теперь тщательно и вновь рассмотрев их, я нашел ускользавшие от меня до сих пор решения».

Это вступление вскрывает некоторым образом характер творческой работы знаменитого геометра, подтверждая установившееся мнение, что исключительная настойчивость и терпение — неотъемлемые признаки гениальности. Трактат содержит 34 теоремы и чрезвычайно богат содержанием. Речь идет об исследовании свойств тел, происходящих от вращения около оси конических сечений.

Заметим, что терминология Архимеда более удачна, чем современная. Мы всегда говорим «эллипсоид», «гиперболоид», «параболоид», привыкши к этим необдуманно введенным и, как часто бывает в истории науки, глубоко пустившим корни терминам. Большой знаток науки классической древности Мюллер, в своем исследовании по терминологии греческих математиков, совершенно справедливо называет наши термины не имеющими смысла, так как они означают кривые, похожие своей формой на эллипс, гиперболу и параболу, тогда как термины Архимеда вполне соответствуют и форме и происхождению тел: коноидом (параболическим или гиперболическим) называется тело, получаемое при вращении около оси параболы или гиперболы и напоминает конус (конусовидно). Сфероидом называется тело, близкое по форме к шару и получаемое от вращения эллипса около одной из его осей. В своем трактате Архимед доказывает замечательную

лемму, сущность которой легче понять, если она выражена алгебраически в современной форме.

Имеем два ряда величин:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n,$$

для которых можно написать:

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2$$
$$A_2 : A_3 = B_2 : B_3$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$A_{n-1} : A_n = B_{n-1} : B_n.$$

Пусть имеются два другие ряда величин:

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \quad \text{и} \quad b_1, b_2, \ldots, b_m \, (m \leqq n),$$

притом такие, что

$$A_1 : a_1 = B_1 : b_1$$
$$A_2 : a_2 = B_2 : b_2$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$A_m : a_m = B_m : b_m.$$

В таком случае:

$$\sum_1^n A_k : \sum_1^m a_k = \sum_1^n B_k : \sum_1^m b_k.$$

Архимед распространяет лемму и на случай бесконечного числа слагаемых. Если под величинами, о которых идет речь, подразумевать геометрические элементы, получается, в сущности, «метод неделимых», открытие которого принадлежит итальянскому математику XVII в. Кавальери.

Прежде чем разобрать, как пользуется этим методом Архимед при решении довольно трудных задач, укажем на некоторые выводы, им полученные.

Он исследует коноидальные и сфероидальные сегменты, получая их рассечением коноида или сфероида плоскостью, перпендикулярной к оси вращения, а иногда под углом к ней. Объемы эти он всегда приводит к объему конуса с теми же высотой и основанием, как у сегмента.

Так, например, «объем сегмента параболического коноида (при рассечении плоскостью, перпендикулярной оси) равен полутора объемам конуса с тем же основанием и той же осью, как у сегмента.

«Если из двух рассекающих плоскостей одна перпендикулярна оси, а другая наклонна, то получаемые при этом сегменты параболического коноида равны, когда равны оси сегментов.

«Отношение объема сегмента гиперболического коноида, полученного рассечением плоскостью, перпендикулярной оси, к объему конуса с теми же осью и основанием равно отношению прямой, составленной из оси сегмента и утроенной «прибавленной» прямой, к прямой, составленной из оси сегмента и удвоенной «прибавленной» прямой».

«Прибавленная» прямая есть отрезок между вершиной коноида и вершиной конуса, полученного от вращения асимптоты, другими словами, «полуось» гиперболы. Если высота сегмента h, полуось a, то отношение объемов будет равно:

$$\frac{h+3a}{h+2a}.$$

Что касается асимптот, то Архимед называет их αἳ «ἔγγιδτα τᾶς τοῦ αμβλυγων'ου νωνοῦ τνμας», т. е.

«наиближе примыкающие к гиперболе». По определению Аполлония, асимптотой (несовпадающей) будет всякая прямая, не пересекающая гиперболу.

Вот некоторые предложения о «сфероидах».

«Половина какого-нибудь сфероида (растянутого или сжатого, смотря по тому, какая из осей эллипса служит осью вращения), полученного от сечения плоскостью, проходящей через центр перпендикулярно оси вращения, равна дважды взятому объему конуса, имеющего то же основание и ось, как у сегмента». Действительно, полуобъем эллипсоида, как известно, равен:

$$\frac{2}{3}\pi a^2 b, \quad \text{или} \quad \frac{2}{3}\pi a b^2.$$

В обоих случаях объем соответственного конуса

$$\frac{b}{3}\cdot\pi a^2 \quad \text{или} \quad \frac{a}{3}\cdot\pi b^2.$$

«Отношение сегмента какого-нибудь сфероида, пересеченного плоскостью, перпендикулярной оси, но не проходящей через центр, к конусу с теми же высотой и основанием, как у сегмента, равно отношению прямой, составленной из полуоси сфероида и оси большего сегмента, к этой последней».

Если секущая плоскость не проходит через центр и не перпендикулярна к оси, то она разбивает сфероид на два неравных сегмента. Если высоту меньшего сфероида назовем h, то высота большего будет $2a - h$. Отношение объемов сегментов к соот-

ветствующему конусу, как показывает Архимед, для меньшего сегмента равно:

$$\frac{a+h}{2a-h}$$

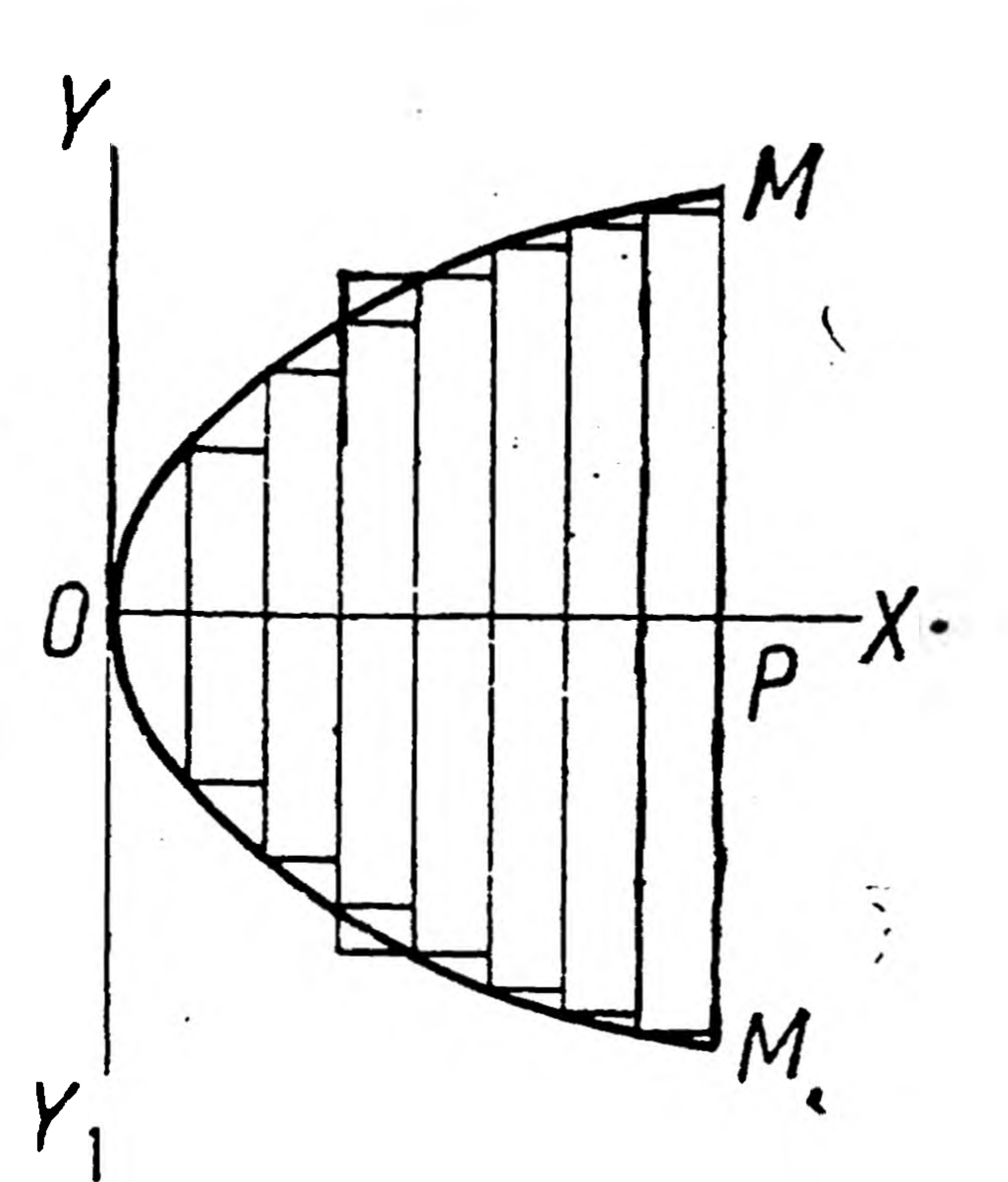
для большего сегмента:

$$\frac{a+h}{h}.$$

При определении объемов Архимед разбивает тело рядом параллельных плоскостей на тонкие слои, которые заключает между двумя рядами цилиндров: вписанных и описанных. Суммируя объемы каждого ряда, он получает два предела, между которыми находится искомый объем. Эти пределы могут быть сближены, если уменьшать расстояние между секущими плоскостями. Таким образом Архимед является как бы предвозвестником того универсального метода, который мы называем «интегральным исчислением», дающим общую формулу для вычисления «кубатур». Способы доказательства Архимеда всегда необычайно строги (так как он всегда пользуется приемом reductio ad absurdum), и результаты, получаемые им, всегда верны и изящны; им только недостает общности, отличающей современный анализ. Но тем большим изумлением проникаешься при виде проницательности и остроумия этого замечательного математика.

Чтобы показать сущность способа Архимеда, мы рассмотрим определение объема параболического коноида, для простоты, в современных обозначениях.

Пусть (черт. 8) высота сегмента OP разделена на n равных частей. Проведя через точки деления ряд секущих плоскостей, параллельных основанию сегмента, мы разобьем весь сегмент на n круглых тел, из которых каждое есть как бы слой, ограниченный двумя плоскостями и частью коноидальной поверхности. Построим на каждом из оснований слоя цилиндр. Пусть объем вписанного будет u, описанного U, а объем слоя v. Тогда ясно, что $u < v < U$. Чем тоньше слой, тем ближе к величине v будут объемы u и U. Если высота $OP = h$, то толщина слоя, а, следовательно, и высота цилиндра равна $\frac{h}{n}$. Называя последовательно радиусы этих цилиндров r_1, r_2,..., r_{n-1} и замечая, что объем каждого равен $\pi r_k^2 \cdot \frac{h}{n}$, где $k = 1,2,..., n-1$, получим, суммируя эти объемы:



Черт. 8.

$$U = \Sigma \pi r_k^2 \cdot \frac{h}{n}.$$

Но, по уравнению параболы, $y^2 = 2px$; при наших обозначениях будем иметь:

$$r_1^2 = 2p \cdot \frac{h}{n},$$

$$r_2^2 = 2p \cdot \frac{2h}{n},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$r_{n-1}^2 = 2p \cdot \frac{(n-1)h}{n}.$$

Следовательно,

$$V_1 = \pi\, 2p \cdot \frac{h^2}{n^2} + \pi\, 2p \cdot \frac{2h^2}{n^2} + \ldots + \pi\, 2p \cdot \frac{(n-1)\, h^2}{n^2},$$

откуда, выводя $2\pi p \frac{h^2}{n^2}$ за скобки, получим:

$$V_1 = 2\pi p \cdot \frac{h^2}{n^2} \Big[1 + 2 + \ldots + (n-1) \Big] =$$
$$= 2\pi p \cdot \frac{h^2}{n^2} \frac{(1 + n - 1)(n-1)}{2}.$$

Объем коноида равен:

$$\text{m}\, V_1 = \pi p \cdot h^2 \lim_{n=\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \pi \cdot p \cdot h^2.$$

Так как объем конуса высоты h и с радиусом основания $PM = y_0$ есть $\frac{\pi h}{3} \cdot y^2$, а по уравнению параболы

$$y_0^2 = 2p \cdot h,$$

то окончательно объем конуса есть

$$\frac{2}{3} \pi p \cdot h^2.$$

По Архимеду, объем сегмента равен полутора объемам этого конуса, т. е.

$$\frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} \pi p h^2 \right) = \pi p h^2.$$

Чтобы покончить с трактатом «О коноидах и сфероидах», заметим, что Архимед дает в нем выражение площади эллипса, доказывая, что она равна площади круга, радиус которого есть среднее геометрическое между полуосями эллипса.

О СПИРАЛЯХ

Этот замечательный трактат содержит 28 предложений и начинается обращением к Досифею.

«Ты настоятельно просил меня написать доказательства теорем, посланных Конону. Многие из них находятся в книгах, привезенных тебе Гераклитом. Посылаю тебе другие не находящиеся там. Не удивляйся, что я так долго не решался сообщить доказательства этих теорем. Причиной было то, что я желал дать время найти их людям, занимающимся математикой и желавшим заняться этим исследованием. Так как столько в геометрии теорем, которых, кажется, нет средства узнать и которые потом становятся очевидными. Конон умер, не успев найти эти доказательства, и оставил теоремы недоказанными. Будь он жив, он, без сомнения, нашел бы их и своими открытиями раздвинул бы границы геометрии, так как мы знаем, что этот человек обладал большой сметливостью и способностью к этой науке. Много лет прошло после его смерти, и я не знаю, решил ли кто эти задачи. Я изложу их все одну за другой».

Современник Архимеда, Конон, из Самоса, ученый Александрийской школы, по словам Аполлония, автор сочинения «О конических сечениях», был весьма сведущим математиком и первый исследовал свойства кривых, называемых спиралями.

Досифей был учеником Конона и также занимался математикой и астрономией. Архимед под-

держивал после смерти Конона переписку с Досифеем. Вот что пишет ему Архимед, узнав о смерти Конона, в начале трактата «О квадратуре параболы»: «Когда я узнал, что Конон, единственный из моих друзей, остававшийся в живых, умер, то я, зная, что ты был в дружбе с ним и хорошо знаком с геометрией, глубоко огорченный смертью человека, бывшего моим другом и глубоко изучившего математические науки, решился послать тебе, как сделал бы это Конону, геометрическую теорему, которой еще никто не занимался и которую я рассмотрел».

Как высоко Архимед ставил Конона, видно из письма его к Досифею в трактате «О шаре и цилиндре».

«Хорошо было бы, — пишет он, — если бы мои открытия были обнародованы при жизни Конона, так как я думаю, что он был весьма способен изучить их и сообщить о них тем, кто занимается математикой. Я посылаю их тебе с прибавлением доказательств. Занимающиеся этой наукой могут на досуге рассматривать их».

Древние геометры имели обыкновение сообщать о своих открытиях, но до поры до времени не приводя доказательств. Это делалось из предосторожности, во избежание присвоения кем-либо чужого открытия. Так как и в те времена бывали такие лица и притом мало заботившиеся о достоверности присваиваемого, то Архимед заявил в рассматриваемом трактате о двух найденных им ложных предложениях, думая, таким образом, тех лиц, которые удостоверяли, что ими все найдено и что

им все известно, не приводя никогда доказательств, изобличить в том, что «они хоть раз нашли невозможное».

Трактат «О спиралях» свидетельствует о необычайной глубине геометрических знаний Архимеда. Прежде всего он знакомит с происхождением этих оригинальных кривых.

Если прямая линия, один конец которой закреплен, вращается в плоскости равномерно, пока прямая не вернется к своему первоначальному положению, и если при этом точка движется также равномерно по вращающейся прямой, начиная свое движение от закрепленного конца, то эта точка опишет «спираль». Площадь, заключенная между спиралью и прямой, пришедшей в первоначальное положение, равна третьей части площади круга, центр которого — неподвижная точка, а радиус равен части прямой, которую прошла точка во время одного оборота прямой.

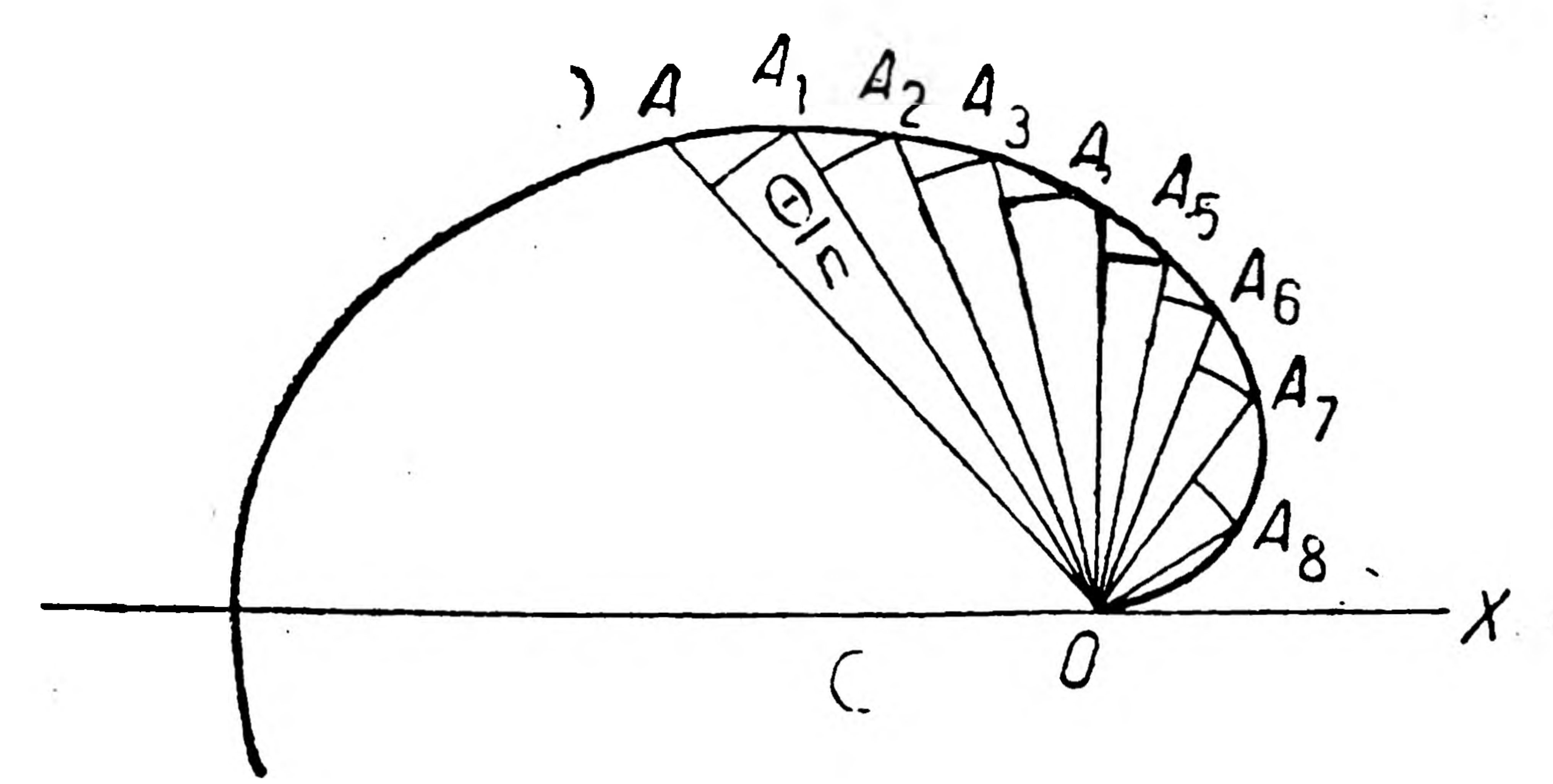
Это и есть известная спираль, которой присвоено имя Архимеда, детально исследовавшего ее свойства, хотя образование ее дано Кононом [1]. Из сказанного видно, что, относя кривую к полярным координатам, ее можно определить как геометрическое место точек, характеризующееся тем, что радиус-вектор пропорционален амплитуде, и уравнение ее есть $r = a\theta$, где a постоянно.

Площадь, о которой только что говорилось, нахо-

---

[1] Кантор, впрочем, это оспаривает.

дится легко методами интегрального исчисления [1], но при тех средствах, какими располагал Архимед, требовалась исключительная виртуозность.



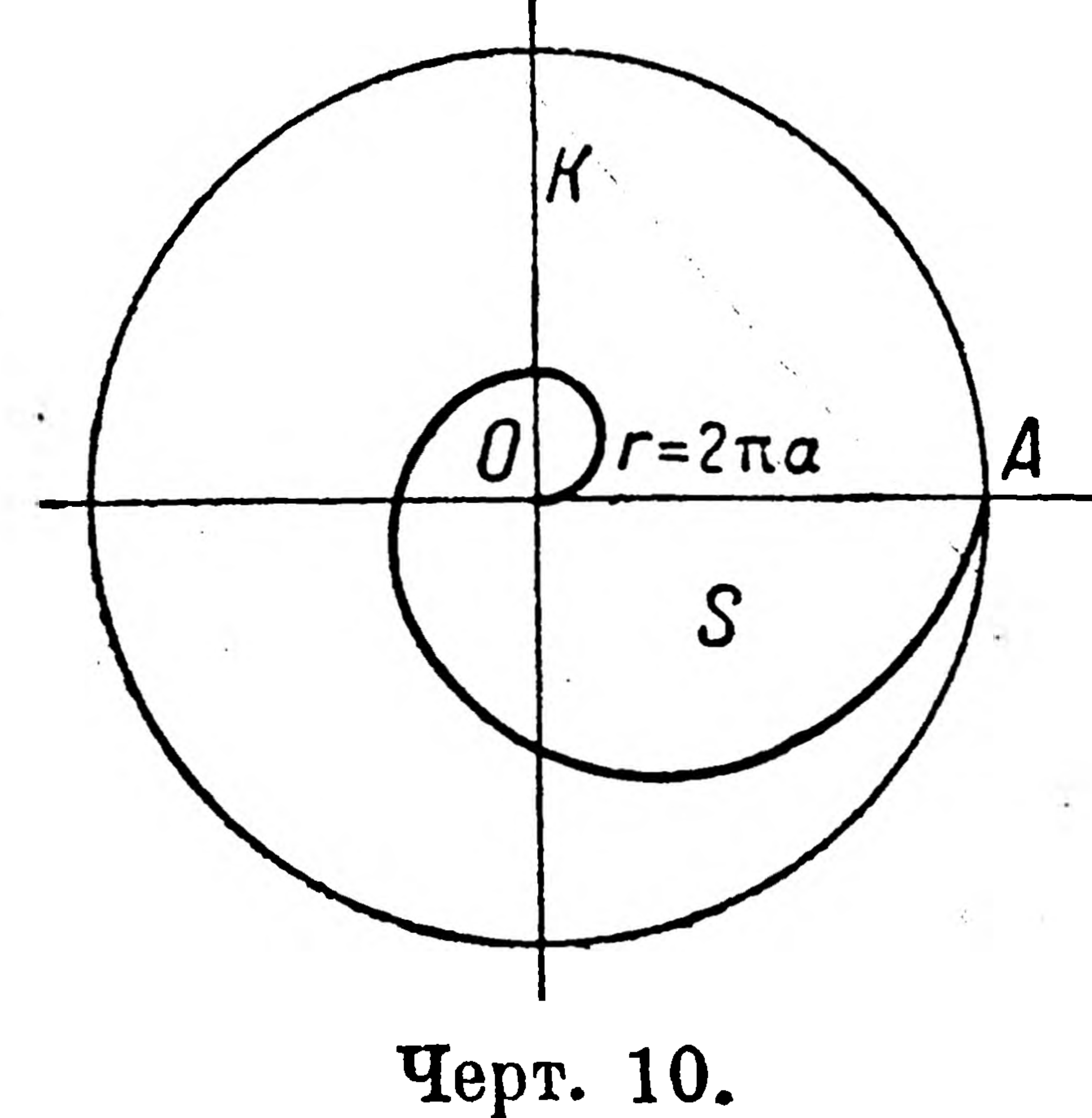
Черт. 9.

Вот ход его рассуждений: пусть требуется найти площадь витка спирали, образуемого кривой и радиусом-вектором OA, составляющим с полярной осью угол θ ($\angle XOA$) (черт. 9). Разобьем этот угол на n равных частей и построим ряд круговых секторов, описав из полюса, как из центра, дуги радиусами, последовательно рав-

---

[1] По известной формуле квадратур в полярных координатах для первого витка имеем:

$$S = \frac{2}{1}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \\ = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$



Черт. 10.

Если описать из полюса, как из центра, окружность радиусом, равным отрезку полярной оси от полюса до конца первого витка (черт. 10), что для $\theta = 2\pi$ даст $r = 2\pi a$, то площадь круга $K = 4\pi^3 a^2$ и, следовательно, $S = \frac{1}{3} K$.

ными соответствующим размерам радиусов-векторов OA_8, OA_7, OA_6,...

Суммируя эти секторы, получим площадь, которая при увеличении числа n исчерпывает площадь витка. Так как площадь кругового сектора равна произведению дуги на половину радиуса, то, имея в виду, что $OA_8 = a\frac{\theta}{n}$, получим, что площадь сектора $OA_8A_7 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a\theta}{n}\right)^2\cdot\frac{\theta}{n}$. Точно так же найдем площадь

$$OA_7A_6 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2a\theta}{n}\right)^2\cdot\frac{\theta}{n} \text{ и т. д.}$$

Площадь n-го сектора выразится так:

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(n-1)a\,\theta}{n}\right]^2\cdot\frac{\theta}{n}.$$

При суммировании получим:

$$\sigma = \frac{a^2\theta^3}{2n^3}\left[\,1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\,\right].$$

Вопрос приводится, следовательно, к определению суммы квадратов чисел натурального ряда. Так как она равна

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то

$$\sigma = \frac{a^2\cdot\theta^3}{2n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

что при $\theta = 2\pi$ и $n = \infty$ в пределе даст искомую площадь:

$$S = \lim_{n=\infty}\sigma = \frac{2}{3}\pi^3a^2\cdot\lim_{n=\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi^3a^2\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{4}\pi^3a^2.$$

В 10-м предложении Архимед показывает, как вычислить сумму квадратов чисел натурального ряда в своеобразной геометрической трактовке:

«Если взяты линии в каком угодно количестве и каждая превосходит следующую на избыток, равный меньшей из всех, и если взяты в том же числе, как первые, другие линии, из которых каждая равна большей из линий первого ряда, то сумма всех квадратов на линиях, равных большей, сложенная с квадратом на большей и сложенная с площадью, заключенной между меньшей из линий и линией, составленной из всех неравных линий,—равна утроенной сумме квадратов, построенных на неравных линиях».

Если принять длину меньшей из всех прямых за единицу, длину второй за два, длину последней за n, то в современных обозначениях задача сводится к доказательству тождественности выражений:

$$n \cdot n^2 + n^2 + 1 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \text{ и}$$
$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2).$$

Это легко показать. Преобразуя первое выражение, получим:

$$n \cdot n^2 + n^2 + 1 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n^2(n + 1) + \frac{n(n + 1)}{2} = n^2(n + 1)\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{9}.$$

Для второго выражения, пользуясь формулой суммы квадратов натурального ряда, непосредственно получим:

$$3(1^2 + 2^1 + 3^1 \cdots + n^2) = \frac{3n(n + 1)(2n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

что и доказывает правильность тождества.

Не вдаваясь в дальнейший анализ трактата, укажем только на некоторые заключения, к которым приходит Архимед, чтобы читатель имел возможность судить, насколько глубоко изучил греческий геометр свойства спирали.

«Если прямая, сделавшая оборот, и точка, двигавшаяся по этой прямой, будут продолжать свое движение, повторяя свои вращения, приходя каждый раз снова в первоначальное положение, то площадь, заключенная в витке, полученном от третьего вращения, вдвое больше площади, заключенной в витке второго вращения. Площадь, полученная от четвертого вращения, втрое более площади второго вращения. Площадь, полученная от пятого вращения, вчетверо больше; наконец, площади витков, полученных при следующих вращениях, соответственно будут равны площади, заключенной в витке, полученном при втором вращении, умноженной на числа, следующие за только что упомянутыми. Площадь, заключенная в витке первого вращения, равна шестой части площади витка второго вращения».

ΕΦΟΔΙΚΌΝ

В 1906 г. проф. Гейберг исследовал манускрипт, представляющий собой «палимпсест» (т. е. пергамент, с которого удален первоначальный текст и написан новый) из монастыря св. Саввы близ Иерусалима. Под Эвхологием XIII в. оказался текст сочинения Архимеда, написанный полууставом X в. К счастью, текст был не стерт, а только смыт, и

проф. Гейбергу с помощью лупы удалось его восстановить. Это открытие — величайшей важности, так как для истории науки эта рукопись драгоценна. Во-первых, здесь мы находим отрывки из трактатов «О шаре и цилиндре», «Измерение круга», «О спиралях», «О равновесии плоских фигур», почти полный греческий текст (что весьма важно) трактата »О плавающих телах» и начало «Стомахиона».

Но особенно ценен большой отрывок сочинения «Ἀρχιμῆδους περὶ τῶν μηχανικῶν δεωρημάτων πρός, Ἐρατοσδένην ἐφόδος» (послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах механики). Это — тот самый Εφοδικόν, который комментировал Феодосий из Триполи (I в. до н. эры) и многократно цитирует Герон. Это «руководство» состоит, по словам самого Архимеда, «из рассуждений, основанных на методе, но не являющихся еще доказательствами». В нем до некоторой степени приподнята завеса с лаборатории научной мысли древних. Дошедшие до нас сочинения их представляют материал в готовом и обработанном виде, тогда как в «Эфодике» этот материал исследуется как бы начерно эвристическим методом. После этой предварительной работы остается найденные предложения облечь в форму строгого доказательства.

Вот что говорит сам Архимед в начале сочинения: «Как я еще раньше говорил, я вижу, что ты серьезный ученый и не только выдающийся учитель философии, но и почитатель математических исследований; поэтому я счел полезным развить и изло-

жить тебе в этой книге особенный метод, которым ты сможешь воспользоваться, как руководством для исследования при помощи механики некоторых геометрических вопросов. Этот метод, по моему убеждению, также полезен для доказательства этих самых теорем, и многое, что я раньше выяснил при помощи механики, я потом доказал посредством геометрии, ибо мои рассуждения, основанные на этом методе, не были еще доказательствами; легче, конечно, найти доказательство, когда мы посредством этого метода составим себе представление об исследуемом вопросе, чем сделать это без такого предварительного представления. Так, например, в доказательстве известного положения, что конус и пирамида составляют треть, конус — цилиндра и пирамида — призмы, когда у них общие основания и равные высоты, впервые доказанного Эвдоксом, не малую часть заслуги необходимо также признать за Демокритом, который был первым, выразившим без доказательства эти предложения о вышеупомянутых телах.

Я тоже был в состоянии сообщаемые здесь теоремы таким же образом найти предварительно и теперь чувствую себя обязанным сделать этот метод известным, отчасти для того, чтобы никто не думал, что, сообщая об этом раньше, я распространял пустые разговоры, отчасти же из убеждения, что это принесет немало пользы математике, а именно, я думаю, что кто-нибудь из теперешних или будущих исследователей посредством предложенного

здесь метода найдет и другие теоремы, которые мне не пришли еще в голову».

Весь этот отрывок мы цитируем по переводу Тимченко, к которому и отсылаем читателей, желающих подробно ознакомиться с содержанием «Эфодика» (см. в конце «сведения о переводах и печатных изданиях сочинений Архимеда»).

Мы укажем только на некоторые предложения этого трактата. Предпослав ряд уже ранее сообщенных приложений о центре тяжести, Архимед показывает, на основании механических соображений, что параболический сегмент составляет $^4/_3$ вписанного в него треугольника той же высоты и основания. Тем же приемом выясняется, что описанный около шара цилиндр в полтора раза больше шара. Затем он показывает, что цилиндр, основанием которого служит большой круг сфероида, а высотой — ось сфероида, в полтора раза больше этого сфероида.

Дальше показывается, что сегмент прямоугольного коноида (т. е. параболоида вращения), отсеченный плоскостью, перпендикулярной оси, в полтора раза больше конуса, имеющего то же основание и ось, как у сегмента.

Еще дальше устанавливается положение центра тяжести этого коноида, затем показывается, что центр тяжести полушария лежит на его оси и делит последнюю таким образом, что часть от поверхности полушария относится к остальной части, как 5 : 3.

Дальше следует ряд предложений, на которых уже останавливаться не будем.

О РАВНОВЕСИИ ПЛОСКИХ ФИГУР И ЦЕНТРЕ ТЯЖЕСТИ

Как показывает самое заглавие — это трактат механического содержания, именно, он устанавливает принципы статики, исходя из следующих постулатов:

1. Равные грузы, приложенные к равным плечам рычага, уравновешиваются.

2. Равные грузы, приложенные к неравным плечам рычага, не находятся в равновесии. И тот груз, который приложен к более длинному плечу, падает вниз.

3. Если грузы, подвешенные на каких-нибудь плечах рычага, находятся в равновесии, то, если к одному из грузов что-либо добавить, равновесие нарушится, и груз, к которому прибавлено, падает вниз.

4. Точно так же, если от одного груза отнять что-либо, равновесие нарушится, и груз, от которого не было отнято, падает вниз.

5. Если две плоские равные и подобные фигуры наложить друг на друга, то и центры тяжести их будут один под другим.

6. Центры тяжести подобных, но неравных фигур расположены подобно.

7. Если к грузам, подвешенным к каким-либо плечам рычага и находящимся в равновесии, добавить поровну, равновесие не нарушится.

Пользуясь этими положениями, Архимед приходит к таким следствиям:

1. Соизмеримые грузы находятся в равновесии, когда плечи рычага обратно пропорциональны грузам.

2. То же отношение сохраняется и в случае несоизмеримых грузов.

Затем Архимед определяет положение центров тяжестей в параллелограме, треугольнике, трапеции, параболическом сегменте и определяет механическим способом квадратуру этого последнего.

Таким образом Архимеду принадлежит честь первого обоснования принципа рычага, и Лагранж совершенно прав, когда подчеркивает роль Архимеда в деле установления этого принципа, говоря: «Archimède le seul parmi les anciens, qui nous ait laissé une théorie de l'équilibre, est l'auteur du principe du levier» (Архимед — единственный из древних, который оставил нам теорию равновесия и другие принципы рычага).

О ПЛАВАЮЩИХ ТЕЛАХ

По поводу этого трактата тот же Лагранж говорит: «Мы обязаны Архимеду фундаментом учения о равновесии жидкостей» — и вообще считает этот труд ценнейшим памятником античной науки.

Архимед исходит из положения, что жидкость во всех своих точках непрерывна и однородна и что внутри жидкости частица, находящаяся под меньшим давлением, сдвигается той, давление на которую больше.

Отсюда он заключает, что: 1) «поверхность жидкости в состоянии покоя необходимо должна принять форму шара»; 2) тело меньшей плотности, чем жидкость, погружается в нее, пока вес вытесняемой

жидкости не станет равным весу самого тела; 3) тело, побуждаемое действием внешней силы погрузиться в жидкость, всплывает (или стремится всплыть), причем выталкивающая сила равна избытку веса вытесненной жидкости над весом тела; 4) тело большей плотности, чем жидкость, погружается в этой последней, теряя в весе, сколько весит вытесняемая им жидкость (известный из физики закон Архимеда). Трактат заканчивается исследованием условий равновесия сферических сегментов и коноидов, плавающих в жидкости [1].

Интересно отметить, что второй постулат трактата, гласящий, что «поверхность всякой жидкости, пребывающей в покое, имеет форму сферы, центр которой совпадает с центром земли», косвенно указывает, что мысль о шарообразности земли была во времена Архимеда тривиальной. Эта мысль, воспринятая на Западе только через 16—17 столетий, была весьма распространена среди греков и в доархимедовскую эпоху. Об этом учил Аристотель, приводя в качестве доказательства шарообразности земли понижение и повышение звезд над горизонтом при передвижении с севера на юг или наоборот, а также выпуклость тени земли, падающей на луну при ее затмениях. Аристотель утверждал,

---

[1] Например, он находит, что если ось сегмента прямоугольного коноида не превышает трех четвертей параметра, этот сегмент, при всяком весе, примет вертикальное положение, будучи брошен в жидкость.

что иначе и быть не может, так как все тела равномерно стремятся к земле — общей неподвижной точке или центру мира. Современник же и друг Архимеда — Эратосфен — пытался даже определить размеры земного шара и сделал это с ошибкой, не превышающей 14—15%.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΟΩΝ

Архимеду приписывают еще так называемую «задачу о быках». В 1773 г. Лессинг нашел греческую эпиграмму в стихах, содержащую задачу на неопределенные уравнения, будто бы предложенную Архимедом александрийским математикам в письме к Эратосфену. Историки науки расходятся во мнениях относительно авторства Архимеда в этой проблеме. Если обозначить буквами б, ч, р и п число быков белой, черной, рыжей и пестрой масти, а буквами б′, ч′, р′, п′ — число коров тех же мастей, то согласно тексту задачи, требующей определения всего числа коров и быков, можно составить семь уравнений:

$$б=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) ч+р. \qquad (I)$$

$$ч=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) п+р. \qquad (II)$$

$$п=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) б+р. \qquad (III)$$

$$б' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(ч + ч^1). \qquad (IV)$$

$$ч' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(п + п'). \qquad (V)$$

$$п' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(р + р'). \qquad (VI)$$

$$р' = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(б + б'). \qquad (VII)$$

Но в рукописи имеются добавочные условия:

1) б + ч должно представлять точный квадрат,

2) чп + р должно быть треугольным числом.

Если принять во внимание эти условия, вопрос сводится к решению неопределенного уравнения второй степени. При этом число быков выразится с помощью 206 545 цифр.

ПСАММИТ

Этот небольшой арифметический трактат стоит особняком по отношению к другим сочинениям Архимеда, имеющим более или менее тесную связь.

Задача, которую ставит и решает Архимед, выражается очень просто: определить число песчинок в пространстве вселенной. Из текста самого трактата мы узнаем и причину, побудившую его разработать эту тему: он хочет рассеять ложное мнение одних, что это число бесконечно, а других — что, хотя оно и конечно, но большего представить себе невозможно. Повидимому, вопрос этот под-

нимался в ученых кругах древней Греции и, вероятно, имеет свою историю, нам, к сожалению, не известную. Но мы знаем, что и в более глубокой древности люди питали пристрастие к большим числам.

Если мы обратимся к вавилонянам, то, как показывают изданные Гильпрехтом в 1906 г. математические таблицы, они свободно обращались с огромными числами, выражая их по сексагезимальной системе. В одной из таблиц приведены делители и частные числа $60^8+10\cdot60^7$. В настоящее время его, правда, нетрудно вычислить:

$$60^7(60+10)=6^7\cdot10^7\cdot7\cdot10=6^7\cdot7\cdot10^8=$$
$$=279\,936.7\cdot10^8=195\,955\,200\,000\,000.$$

Египтяне не были так искусны в вычислениях, явно предпочитая геометрию, но и у них, при отсутствии далеко идущей нумерации, встречаются попытки фигурального выражения больших чисел. Так, в одном из памятников египетской письменности (в 175 главе так называемой «Книги мертвых») покойник спрашивает бога Атума, каково «мое время» жизни, на что Атум отвечает: «Ты — до миллиона миллионов лет времени жизни миллионов лет». Это число, правда, неопределенно, но, во всяком случае, не менее 10^{18}.

Затем, в тексте одной гробницы жреца бога Аи (XIV в. до н. эры) находим тоже стремление к выражению бесконечности. Соответствующая часть

текста гласит: «Да наградит тебя он (бог) юбилеями, как «число песку» берега моря, измеряемого жезлом ипет, как мера моря, определяемая джауэтом, или вес горы, извешенной на весах, или перья птиц, или листья деревьев»...

Здесь определенно звучит мотив бесконечности, не допускается мысль, что фактически можно, например, сосчитать «число песку берега моря».

Если от Ближнего Востока мы перейдем в Азию, то у индусов, необычайно искусных в науке чисел, мы встретимся с разработанными системами нумерации. Будда, согласно преданию, будучи мальчиком, подвергается испытанию в знании чисел: он постепенно называет единицы всех разрядов от низших к высшим до тех чисел, которыми можно считать всё, начиная от зерен в поле и до самой мелкой песчинки. Потом он переходит к «катхе» — счету звезд ночных, «кати-катхе» — счету морских капель, далее к счету песчинок Ганга и к счету, единицами которого изображается весь песок десятка лакх (лакха — 100 000) рек — таких, как Ганг.

В «Рамаяна» рассказывается, что в армии Сугрива участвовали в сражении десять тысяч секстиллионов (10^{25}) обезьян!

Такого количества не могла бы вместить вся наша планетная система, если бы она была битком набита обезьянами.

В III в. до н. эры, т. е. как раз, когда жил Архимед, написана одна из священных книг буд-

дистов «Lalitavistara», где приводится следующая система мер протяжения:

Первоначальный атом	1,
1 малая пылинка	7 атомов,
1 средняя	7 малых атомов,
1 поднятая ветром	7 средних атомов,
1 пылинка зайца	7 поднятых ветром,
1 пылинка барана	7 пылинок зайца,
1 пылинка быка	7 пылинок барана,
1 зерно маковое	7 пылинок быка,
1 зерно горчичное	7 зерен мака,
1 зерно ячменное	7 зерен горчичных,
1 сустав пальца	7 зерен ячменя,
1 пядень	12 суставов,
1 локоть	4 пяди,
1 дуга	4 локтя,
1 крока	1000 дуг,
1 иоджана	4 крока.

Дальше фигурируют периоды в сто тысяч миллионов «kalpas», где «kalpa» промежуток времени в 4 320 000 000 лет. Bönke, о котором мы уже раз упоминали, полагает, что Архимед мог быть знаком с этой книгой. Это, конечно, вопрос, наукой еще не разрешенный, но весьма возможно, что он мог знать о подобных вычислениях индусов, хотя бы из рассказов путешественников, так как в это время с Индией, несомненно, существовали сношения, которые способствовали взаимной ассимиляции элементов культуры. Но если даже допустить знакомство Архимеда с фантастическими цифрами индусов, все же это нисколько не умаляет научных достоинств

системы, разработанной Архимедом. И здесь мы видим печать оригинальности и глубокой продуманности, присущих вообще всем его произведениям.

Так как дальше мы приводим полный перевод трактата, мы не станем здесь передавать его содержания[1], ограничившись только указаниями, которые помогут уяснить сущность архимедовой классификации чисел.

Греки считали задолго до Архимеда по десятичной системе и пользовались следующими наименованиями единиц различных разрядов:

единицы (монады)	μονάδες
десятки (декады)	δεκάδες
сотни (гекатонтады)	ἑκατοντάδες
тысячи (хилиады)	χιλιάδες
десятки тысяч (мириады)	μυριάδες
десятки мириад	δέκα μυριάδες
сотни мириад	ἑκατὸν μυριάδες
тысячи мириад	χίλιαι μυριάδες

Желая показать, что есть полная возможность выражать числа, значительно превосходящие то, которым определяется число песчинок в пространстве, равном шару неподвижных звезд, Архимед кладет в основу своей системы общеупотребительную единицу высшего разряда — мириаду (10^4). Тогда мириада мириад, или 10^8, замыкает собой все числа от единицы, и им присваивается название чисел «первых». Сама мириада мириад считается единицей чисел «вторых» — «октадой». От этой

[1] Подробности приведены в комментариях.

единицы счет ведется опять до мириады мириад их, т. е. от 10^8 до 10^{16}. Мириада мириад «вторых» чисел есть единица «третьих», и снова счет идет от 10^{16} до 10^{24}.

Архимед доводит эту классификацию до октады чисел октадных, замыкающей «первый период». Это число равно $10^{8 \cdot 10^8}$, или единице с восемью стами миллионов нулей. Оно называется единицей «второго периода». Октада первых чисел этого периода ($10^{8 \cdot 10^8 + 8}$) будет единицей «вторых» чисел «второго» периода. Дальше он вводит единицы чисел «третьего периода» ($10^{2 \cdot 8 \cdot 10^8}$), «четвертого периода» ($10^{3 \cdot 8 \cdot 10^8}$) и далее до октады чисел октадных периода октадного ($10^{10 \cdot 8 \cdot 10^8}$).

Это последнее число есть единица, которую сопровождает восемьдесят тысяч биллионов нулей.

Чтобы понять всю огромность этого числа, заметим, что, чтобы написать это число полностью, помещая по 400 цифр (нулей) на бумажной полоске длиной в один метр, понадобится лента такой длины, что ею можно опоясать земной экватор 4970 раз.

Если ехать со скоростью тысячи километров в сутки, то расстояние, равное длине этой ленты, можно проехать в 545 лет! Число песчинок, заполняющих пространство, равное шару неподвижных звезд, в сравнении с этим числом совершенно ничтожно, так как, по вычислениям Архимеда, оно оказывается меньше тысячи мириад чисел «восьмых», т. е. $10^3 \cdot 10^4 \cdot (10^8)^7 = 10^{63}$.

В своем «Псаммите» Архимед, таким образом, доказал, что числовой ряд бесконечен.

Архимедовы числа были своего рода «трансфинитными» числами древности. Мысль о бесконечно малом неизбежно сосуществует с мыслью о бесконечно большом: это прекрасно понимал Архимед, постоянно ведя исследование бесконечных процессов.

Недаром творец диференциального исчисления Лейбниц сказал, что, «внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометров».

Плутарх, как известно, не бывший математиком, тем не менее, говорит: «Во всей геометрии нет теорем более трудных и глубоких, чем теоремы Архимеда, и, несмотря на это, они доказаны очень просто и весьма ясно. По моему мнению, невозможно найти доказательства какого бы то ни было из предложений Архимеда; но, прочитавши доказательство, данное им, нам кажется, что мы сами дали бы это доказательство — так оно просто и легко!»

Действительно, нам, привыкшим к костылям современной символики, к целому комплексу условных знаков, которые как бы сами за нас думают, чтение трудов Архимеда не легко, но его современники, воспитанные на строгих эвклидовских рассуждениях, не избалованные алгебраической символикой и приобретавшие постепенно навык удерживать в памяти длинную цепь умозаключений, несомненно, должны были читать Архимеда с удовольствием.

Его идеи и методы были новы, оригинальны и

чрезвычайно плодотворны: в областях, им разработанных, он не имел предшественников, а когда погиб, не нашлось сколько-нибудь достойных преемников, способных пополнить драгоценное наследие и углубить путь, намеченный великим геометром.

Архимеду приписывают изобретение множества остроумнейших машин и приборов, но сам он не придавал им никакого значения: это был представитель «чистой науки», глубочайший теоретик в полном смысле этого слова.

Один из величайших математиков, Лагранж, и известный астроном Деламбер в своем отчете, представленном Французской академии наук, о переводе сочинений Архимеда Пейраром выразились так: «За Архимедом сохранилась репутация одного из самых удивительных гениев, которые когда-либо посвящали себя математике. Ни один из геометров древности не сделал таких многочисленных и важных открытий.

Несмотря на преимущества новых методов, сознаваемых всеми геометрами, всякий математик должен поинтересоваться, какими тонкими и глубокими размышлениями Архимед мог достичь таких сложных результатов».

И мы с своей стороны советуем всем истинным любителям математики читать Архимеда: это — великий учитель, у которого можно научиться многому.



А Р Х И М Е Д

ИСЧИСЛЕНИЕ ПЕСЧИНОК В ПРОСТРАНСТВЕ РАВНОМ ШАРУ НЕПОДВИЖНЫХ ЗВЕЗД (ПСАММИТ)



ГОСУДАРЬ ГЕЛОН! [1]

Есть люди, думающие, что число песчинок бесконечно. Я не говорю о песке в окрестности Сиракуз и других местах Сицилии, но о всем его количестве как в странах населенных, так и необитаемых.

Другие думают, что хотя число это и не бесконечно, но большего представить себе невозможно.

Если бы эти последние вообразили массу песку в объеме земного шара, причем им были бы наполнены все моря и пропасти до вершин высочайших гор, то, конечно, они еще меньше могли бы поверить, что легко назвать число, его превосходящее.

Я, напротив, постараюсь доказать с геометрической точностью, которая убедит тебя, что между числами, упоминаемыми мной в книге, написанной Зевксиппу [1], есть числа, превышающие число пес-

---

[1] Гелон — сын царя Сиракузского Гиерона.

чинок, которые можно вместить не только в пространстве, равном объему земли, наполненной указанным выше способом, но и целого мира.

Ты знаешь, что, по представлению некоторых астрономов, мир имеет вид шара, центр которого совпадает с центром земли, а радиус равен длине прямой, соединяющей центры земли и солнца.

Но Аристарх Самосский в своих «Предложениях», написанных им против астрономов, отвергая это представление, приходит к заключению, что мир гораздо больших размеров, чем только что указано.

Он полагает, что неподвижные звезды и солнце не меняют своего места в пространстве, что земля движется по окружности около солнца, находящегося в ее центре, и что центр шара неподвижных звезд совпадает с центром солнца, а размер этого шара таков, что окружность, описываемая, по его предположению, землей, находится к расстоянию неподвижных звезд в таком же отношении, в каком центр шара находится к его поверхности.

Но, очевидно, что это невозможно: так как центр шара не имеет никаких размеров, то нельзя допустить, чтобы он имел какое-то отношение к поверхности шара.

Вероятно, говоря так, Аристарх [2] подразумевал следующее:

«если принять землю за центр вселенной, то в каком отношении шар земной к упомянутому шару мира, в таком будет и шар, большой круг которого описывается движущейся землей, к шару неподвиж-

ных звезд, потому что свои доказательства он выводит из этих предположений. И больше всего потому, что шар, в котором он представляет землю движущейся, он, кажется, считает равным шару, названному «миром».

Теперь я утверждаю, что если бы был шар песку, равный аристархову шару неподвижных звезд, то можно доказать, что между числами, о которых говорится в книге «Начал», есть такие, что они превосходят число песчинок, заполняющих этот шар.

Именно, я делаю следующие предположения: во-первых, окружность земли имеет около трехсот мириад стадий [3], но не больше; так как некоторые пытались доказать, как тебе известно, что она имеет около тридцати мириад стадий, то я иду гораздо дальше, считая ее в десять раз больше, т. е. в триста мириад [4], однако не более.

Во-вторых, диаметр земли больше диаметра луны, а диаметр солнца больше диаметра земли; все это допускают, опираясь на мнения большинства вышеупомянутых астрономов.

Наконец, диаметр солнца в тридцать раз превышает диаметр луны [5], но не более, так как из упомянутых астрономов Эвдокс утверждает, что он почти в девять раз больше, а Фидий, сын Акупатра, считает его двенадцатикратным, наконец, Аристарх пытается доказать, что он больше чем в восемнадцать, но меньше чем в двадцать раз [6].

Но я, чтобы устранить всякие возражения против доказательства моего предложения, иду еще

дальше, полагая, что диаметр солнца почти в тридцать раз больше диаметра луны, однако не более.

Кроме того, диаметр солнца больше стороны тысячеугольника, вписанного в наибольший круг мира. Это я допускаю, опираясь на мнение Аристарха, утверждающего, что видимый размер солнца есть одна семьсот двадцатая часть его орбиты, называемой Зодиаком [7].

С помощью особого прибора я старался путем наблюдений найти угол солнца, вершиной которого будет глаз, хоть выполнить это успешно стоит больших трудов, так как ни глаз, ни руки, ни инструменты, при этом применяемые, недостаточны для совершенно точных измерений.

Впрочем, считаю лишним распространяться об этом, как о предмете, о котором уже не раз говорилось, тем более, что для целей доказательства моего предложения достаточно ограничиться одним таким углом, чтобы он, имея вершину в глазу наблюдающего, был не больше угла, под которым видно солнце, и другим углом с вершиной в центре глаза, не меньшим того угла, под которым видимо солнце.

Положив для этого достаточной длины линейку на плоскости, расположенной так, чтобы можно было наблюдать восходящее солнце, я незадолго до восхода поместил на линейку круглый стержень в отвесном положении, и как только показалось солнце на горизонте, а следовательно, на него еще можно было смотреть, направил линейку одним концом прямо на солнце, поместив у другого конца ее глаз, а

между глазом и солнцем — цилиндрический стержень так, чтобы он совсем закрывал солнце.

После этого стал отодвигать стержень от глаза до тех пор, пока с обеих сторон его едва стало показываться солнце, после чего прекратил движение стержня.

Если бы глаз наблюдающего был точкой, то, проводя от конца линейки, находящегося у глаза, касательные к стержню, он получил бы угол между этими прямыми, меньший угла, под которым видимо солнце, потому что часть солнечного диска была бы видима по краям по обе стороны стержня. Но так как глаз является не точкой, а частью, имеющей некоторый размер, я взял другой стержень с диаметром, не меньшим ширины зрачка, поместил его на конец линейки у глаза и, проводя касательные к обоим стержням, получил между ними угол, меньший того, под которым видимо солнце, если вершина его в центре глаза.

Стержень, имеющий диаметр не меньше ширины зрачка, можно получить так: надо взять два тонких одинакового размера стержня — один белый, а другой темный — и поместить их перед глазом так, чтобы первый был дальше от него, а второй как можно ближе, почти касаясь лица.

Если эти стержни меньшего сечения, чем зрачок, то наблюдающий, видя ближайший стержень, увидит и более удаленный целиком, если он только намного тоньше; если же разница невелика, то будут видны лишь некоторые части его по обе стороны переднего стержня.

Следовательно, если расположить, как указано, два стержня одинаковой толщины, чтобы один закрывал другой, но так, чтобы края второго были видны, то диаметр каждого такого стержня будет уже не менее ширины зрачка.

Чтобы получить угол, не меньший того, под которым видимо солнце, когда вершина в центре глаза, я стал постепенно отодвигать стержень от глаза, пока он не закрыл солнца, а затем от конца линейки у глаза провел касательные к стержню: таким образом между этими прямыми получил угол не меньший, чем тот, под которым видимо солнце, когда вершина в центре глаза.

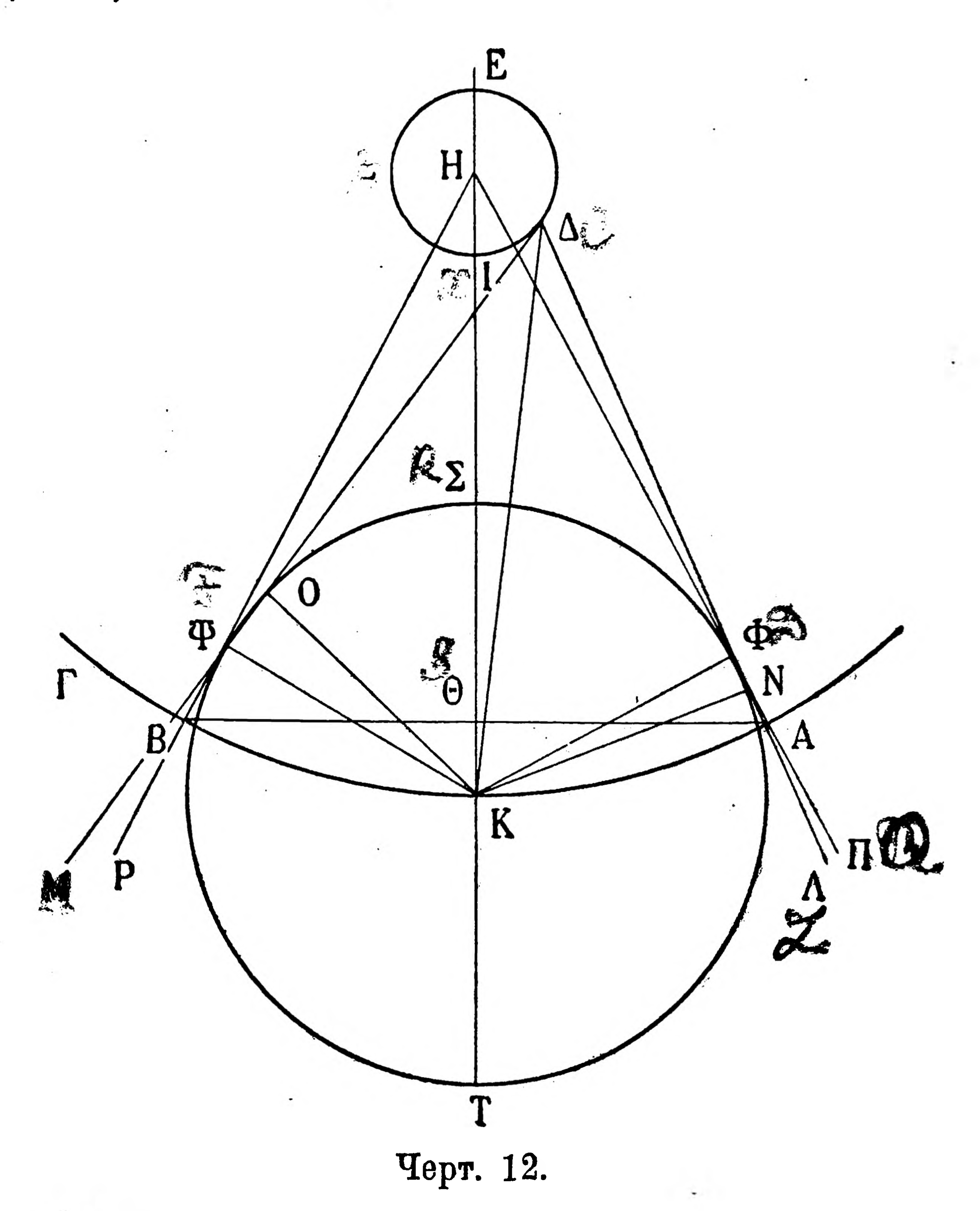
Измерив посредством прямого угла полученные таким путем углы, я нашел, что больший из них меньше, чем одна сто шестьдесят четвертая часть прямого угла, а меньший больше, чем одна двухсотая часть прямого, из чего следует, что угол, под которым видно солнце, когда вершина в центре глаза, меньше 1 : 164, но больше 1 : 200 прямого угла [8].

Теперь уже легко доказать, что диаметр солнца больше стороны тысячеугольника, вписанного в наибольший круг мира.

Вообразим плоскость, проходящую через центр земли, центр солнца и глаз наблюдающего, когда солнце немного выше горизонта (черт. 12).

Пусть эта плоскость рассекает шар мира по кругу $AB\Gamma$, земной шар по кругу ΔEZ, а солнце по кругу ΣT; пусть центр земли H, солнца K, а глаза в точке Δ.

Проведем из Δ прямые $\Delta\Lambda$, ΔM, касательные к кругу ΣT, с точками касания N и O, а от H прямые $H\Pi$, HP, касающиеся того же круга в точках



Черт. 12.

Φ и Ψ. Пусть, наконец, прямые $H\Pi$, HP пересекают круг $AB\Gamma$ в точках A и B.

Отрезок $HK > K\Delta$, так как предположено, что солнце на горизонте [9]: поэтому угол $\Lambda\Delta M$ больше угла ΠHP [10].

Но угол $\Lambda\Lambda M$ больше одной двухсотой прямого, но меньше, чем одна его сто шестьдесят четвертая, так как этот угол равен тому, под которым видимо солнце, имея вершину в глазу: поэтому угол ΠHP меньше одной сто шестьдесят четвертой прямого, следовательно, прямая AB меньше прямой, стягивающей дугу круга $AB\Gamma$, разделенного на 656 частей.

Но периметр указанного выше многоугольника имеет отношение к радиусу круга $AB\Gamma$, меньшее $\frac{44}{7}$, потому что периметр всякого многоугольника, вписанного в круг, имеет к его радиусу отношение меньшее, чем $44:7$ [11].

Но мной доказано, что известно и тебе, Гелон, что окружность всякого круга больше утроенного диаметра на избыток, который меньше, чем $\frac{1}{7}$, но больше, чем $\frac{10}{71}$ диаметра. Поэтому отношение AB к $HK <$ [1], чем $11:1148$ [12], а следовательно, AB меньше одной сотой прямой HK.

Но диаметр круга ΣT равен прямой AB, так как половина ее, прямая ΘA, равна $K\Phi$ по равенству прямых HK, HA, от концов которых проведены перпендикуляры, противолежащие тому же углу.

---

[1] У Архимеда нет, конечно, знаков $>$ и $<$. В подлиннике всюду слова больше, меньше. Мы вводим эти знаки исключительно с целью облегчения чтения формул.

Вследствие этого диаметр круга ΣT меньше одной сотой прямой HK. И диаметр EHI меньше диаметра круга ΣT, так как круг ΔEZ меньше круга ΣT, а отсюда $HI\ K\Sigma$ меньше одной сотой прямой HK.

Поэтому отношение HK к ΣI меньше, чем 100 к 99 [13], Но HK не меньше $H\Phi$, а $\Gamma\Sigma$ меньше ΔO, поэтому отношение $H\Phi$ к ΔO меньше, чем 100 к 99 [14].

А так как в прямоугольных треугольниках $HK\Phi$, ΔKO стороны $K\Phi$ и KO равны, а стороны $H\Phi$, ΔO неравны и $H\Phi$ большая, то угол $K\Delta O$ имеет отношение к углу $KH\Phi$ большее, чем HK к ΔK, но меньшее, чем $H\Phi$ к ΔO.

Так как, если катеты [1] двух прямоугольных треугольников одни равны, а другие неравны, то из углов, прилежащих неравным сторонам, больший имеет отношение к меньшему большее, чем отношение большей гипотенузы [2] к меньшей, но меньшее, чем отношение большего из неравных катетов к меньшему [15].

Следовательно, отношение угла $\Lambda\Delta M$ к углу ΠHP меньше, чем отношение $H\Phi$ к ΔO. Но это последнее меньше $\frac{100}{99}$ [16].

---

[1] У Архимеда: «если стороны двух прямоугольных треугольников, между которыми прямой угол», так как термин «катет» тогда не употреблялся.

[2] У Архимеда: «чем отношение большей к меньшей из сторон, противолежащих прямому углу».

Поэтому отношение угла ΛΔМ к углу ΠНР меньше, чем 100 к 99.

И так как угол ΛΔМ больше одной двухсотой части прямого, то угол ΠНР будет больше, чем девяносто девять двумириадных частей, а следовательно, больше одной двести третьей части прямого [17]. Поэтому *АВ* больше прямой, стягивающей дугу круга *АВГ*, разделенного на 812 частей. Но диаметр солнца равен *АВ*: итак, очевидно, диаметр солнца больше стороны тысячеугольника.

Допустив это, докажем еще, что диаметр мира меньше мириады раз взятого диаметра земли и что диаметр мира меньше, чем мириада мириад раз взятые сто стадий.

Действительно, раз уже допущено, что диаметр солнца не превышает тридцать раз взятого диаметра луны, а диаметр земли больше диаметра луны, то ясно, что диаметр солнца меньше, чем тридцать раз взятый диаметр земли.

Кроме того, раз доказано, что диаметр солнца больше стороны тысячеугольника, вписанного в наибольший круг мира, то ясно, что периметр этого тысячеугольника меньше, чем тысяча раз взятый диаметр солнца.

Но диаметр солнца меньше, чем тридцать раз взятый диаметр земли, следовательно, периметр тысячеугольника меньше трех мириад раз взятого диаметра земли.

Таким образом периметр этого тысячеугольника меньше, чем три мириады раз взятый диаметр

земли, но больше утроенного диаметра мира, так как доказано, что диаметр всякого круга меньше третьей части периметра всякого вписанного в этот круг многоугольника, имеющего равные стороны в числе, большем шести, поэтому диаметр мира меньше мириады раз взятого диаметра земли.

А что диаметр мира, меньший мириады раз взятого диаметра земли, будет меньше, чем мириада мириад раз сто стадий, видно из следующего: окружность земли считается не больше трехсот мириад стадий, окружность же земли больше ее тройного диаметра, так как окружность всякого круга больше, чем утроенный диаметр ее. Поэтому ясно, что диаметр земли меньше ста мириад стадий, а так как диаметр мира меньше, чем мириада раз взятый диаметр земли, то ясно, что диаметр мира меньше ста мириад мириад стадий. Таковы предположения о размерах и расстояниях.

Относительно песку я предполагаю следующее: во-первых, если взять количество его не больше макового зернышка, то число содержащихся в этом объеме песчинок будет не больше мириады. Во-вторых, диаметр этого зернышка не меньше одной сороковой части дюйма.

Последнее допускаю, опираясь на следующий опыт: я положил на маленькой дощечке маковые зерна по прямой так, чтобы они касались друг друга, и оказалось, что двадцать пять зерен занимали в длину больше дюйма. Но я допускаю, что маковое зерно еще меньше, а именно, что диаметр его только

не меньше сороковой части дюйма, чтобы и в этом случае не могло быть никакого возражения против того, что я хочу доказать. Вот все мои допущения.

Кроме этого, я нахожу полезным изложить здесь классификацию чисел, так как опасаюсь, если ничего об этом не сказать, чтобы те, кому не приходилось читать книгу, написанную мной Зевксиппу, не впали в заблуждение.

Числа, идущие до мириад, имеют определенные названия, равно как и те, которые идут далее, до мириады мириад, так как в них повторение прежнего. Указанные только что числа, т. е. идущие до мириады мириад, назовем «первыми», а мириаду мириад «первых» чисел назовем единицей «вторых» чисел и станем считать этими единицами, их десятками, сотнями, тысячами, мириадами и далее, до мириады мириад. Потом мириаду мириад «вторых» чисел назовем единицей «третьих» и будем считать единицами «третьих» чисел, их десятками, сотнями, тысячами и мириадами, и далее до мириады мириад.

Совершенно так же мириаду мириад «третьих» чисел назовем единицей «четвертых», мириаду мириад «четвертых» чисел назовем единицей «пятых» и будем продолжать этим же способом называть следующие числа далее до мириады мириад чисел мириадо-мириадных. Такого количества чисел будет, конечно, достаточно. Однако можно итти и далее следующим способом: назовем указанные нами числа «числами первого периода», а последнее число первого периода назовем «единицей второго периода»,

и опять мириаду мириад первых чисел второго периода назовем единицей вторых чисел того же периода, и, подобно этому, последнее из них назовем единицей третьих чисел того же «второго» периода и будем продолжать по этому способу называть следующие числа далее, до мириады мириад чисел мириадо-мириадных «второго» периода. Потом назовем последнее число «второго» периода единицей первых чисел «третьего периода» и т. д., продолжая тем же путем называть следующие числа далее, до мириады мириад чисел мириадо-мириадных «мириадо-мириадного периода».

Допустив такую номенклатуру, условимся, если, начиная с единицы, числа будут непрерывно пропорциональные, второй член которых есть десять, называть «первыми» восемь первых членов, включая и единицу, «вторыми» следующие другие восемь, и таким же образом из всех прочих каждые восемь чисел, или каждая «октада» будет получать наименование в зависимости от расстояния ее от «октады первых чисел».

Следовательно, восьмое число первой октады будет тысяча мириад, первое второй октады, которое есть «единица вторых чисел», будет мириада мириад, так как оно десятикратно числу, ему предшествующему. Восьмое число второй октады будет тысяча мириад «вторых» чисел, первое число третьей октады, которое есть «единица третьих чисел», будет мириада мириад чисел «вторых», так как оно десятикратно предшествующему.

Таким образом, очевидно, что будут многие октады, как уже сказано выше [18].

Небесполезно еще заметить следующее: если будет ряд непрерывно пропорциональных чисел, начиная с единицы, и если два члена этого ряда перемножить, то произведение будет членом того же ряда, настолько удаленным от большего множителя, насколько меньший удален от единицы. Он же будет удален от единицы одним членом меньше в сравнении с тем, насколько удалены от нее оба множителя.

Если *А*, *В*, *Г*, Δ, *Е*, *Z*, *Н*, Θ, *I*, *К*, Λ будут непрерывно пропорциональные числа, начиная с единицы, так что *А* есть единица, тогда пусть произведение Δ на Θ будет какое-нибудь число Ф. Возьмем член этого ряда Λ, настолько же удаленный от Θ, насколько Δ от единицы. Требуется доказать, что Ф равно Λ. Так как в пропорциональных числах *А*, *В*, *Г*, Δ, *Е*, *Z*, *Н*, Θ, *I*, *К*, Λ число Δ настолько удалено от *А*, насколько Λ от Θ, то Δ относится к *А* так, как Λ к Θ. Но Δ есть Δ-кратное числа *А*, поэтому и Λ есть Δ-кратное числа Θ, следовательно, Λ = Ф.

Итак, ясно, что произведение Θ на Δ есть член ряда и удалено от большего из множителей на столько членов, на сколько меньший удален от единицы. Кроме того, ясно, что это произведение удалено от единицы одним членом меньше в сравнении с числом членов, которыми оба множителя вместе удалены от единицы, так как *А*, *В*, *Г*, Δ, *Е*, *Z*,

H, Θ есть то число членов, на которое Θ удалено от единицы, а число членов *I*, *K*, Λ одним меньше в сравнении с числом членов от Δ до единицы, потому что число их вместе с Θ будет равно этому последнему [19].

Все это частью допустив, частью доказав, мы можем теперь перейти к нашему предложению.

Так как было допущено, что диаметр макового зерна не меньше $\frac{1}{40}$ дюйма, ясно, что шар с диаметром в дюйм будет содержать в себе не более 64 000 маковых зерен, так как он во столько раз больше шара, диаметр которого равен $\frac{1}{40}$ дюйма, потому что доказано, что шары находятся в отношении кубов их диаметров.

Но раньше было допущено, что в объеме песку, равном маковому зерну, число песчинок не больше мириады, откуда ясно, что число песчинок, содержащихся в шаре, диаметр которого равен дюйму, будет не больше мириады раз шести мириад четырех тысяч, каковое число содержит в себе шесть единиц чисел «вторых» и четыре тысячи мириад чисел «первых», т. е. меньше десяти единиц чисел «вторых».

Шар с диаметром в 100 дюймов равен сто мириад раз взятому шару, диаметр которого один дюйм, так как шары находятся в отношении кубов их диаметров.

Итак, если бы был шар песку, имеющий диаметр в сто дюймов, то ясно, что число песчинок было бы меньше произведения десяти единиц чисел «вторых» на сто мириад. А так как десять единиц

чисел «вторых» есть десятый, считая от единицы, пропорциональный член ряда, возрастающего в десятикратном отношении, а сто мириад — седьмой от единицы член того же ряда, то произведение их будет шестнадцатый от единицы член того же ряда, так как доказано, что таковое произведение удалено от единицы одним членом меньше в сравнении с тем, насколько удалены от нее оба члена, множители этого произведения.

Но между этими шестнадцатью членами первые восемь, включая единицу, принадлежат к числам, называемым «первыми», а следующие восемь к называемым «вторыми», причем последний из них есть тысяча мириад чисел «вторых». Отсюда видно, что число песчинок в шаре, имеющем в диаметре сто дюймов, будет меньше, чем тысяча мириад чисел «вторых».

Шар с диаметром в мириаду дюймов равен сто мириад раз взятому шару, диаметр которого сто дюймов.

Итак, если бы был шар песку, имеющий мириаду дюймов в диаметре, то ясно, что число песчинок, в нем содержащихся, было бы меньше произведения тысячи мириад чисел «вторых» на сто мириад. А так как тысяча мириад чисел «вторых» есть, считая от единицы, шестнадцатый пропорциональный член, а сто мириад есть от единицы седьмой член того же ряда, то ясно, что произведение их будет двадцать второй член того же ряда, считая от единицы. Но между этими двадцатью двумя членами

первые восемь, включая единицу, принадлежат к числам, называемым «первыми», следующие восемь к называемым «вторыми», а остальные шесть к называемым «третьими», причем последний из них есть десять мириад чисел «третьих», откуда видно, что число песчинок в шаре с диаметром в мириаду дюймов будет меньше десяти мириад чисел «третьих».

И так как шар, имеющий стадию в диаметре, меньше шара с диаметром в мириаду дюймов, то ясно, что число песчинок, содержащихся в шаре с диаметром в стадию, будет меньше десяти мириад чисел «третьих».

Шар, имеющий сто стадий в диаметре, равен сто мириад раз взятому шару с диаметром в одну стадию.

Итак, если бы был шар песку с диаметром в сто стадий, то число песчинок, содержащихся в нем, было бы меньше произведения десяти мириад чисел «третьих» на сто мириад.

Десять мириад чисел «третьих» есть от единицы двадцать второй пропорциональный член, а сто мириад — седьмой от единицы в том же ряду, поэтому произведение их будет двадцать восьмой член того же ряда, считая от единицы. Но из этих двадцати восьми членов первые восемь, включая единицу, принадлежат к числам, называемым «первыми», следующие восемь к называемым «вторыми», следующие за ними восемь к называемым «третьими», а остальные четыре к называемым «четвертыми», притом последний из них есть тысяча единиц чисел «чет-

вертых», откуда следует, что число песчинок, содержащихся в шаре, диаметр которого сто стадий, будет меньше тысячи единиц чисел «четвертых».

Шар с диаметром в мириаду стадий равен сто мириад раз взятому шару, диаметр которого сто стадий. Итак, если бы был шар песку с диаметром в мириаду стадий, то ясно, что число песчинок его было бы меньше произведения тысячи единиц чисел «четвертых» на сто мириад.

Так как тысяча единиц чисел «четвертых» есть двадцать восьмой пропорциональный член от единицы, а сто мириад — седьмой от единицы того же ряда, то ясно, что произведение их будет тридцать четвертый член того же ряда, считая от единицы. Но из этих тридцати четырех членов первые восемь, включая единицу, принадлежат к числам, называемым «первыми», следующие восемь к называемым «вторыми», следующие за ними восемь к называемым «третьими», следующие за этими к называемым «четвертыми», а два остальные к называемым «пятыми», причем последний из них есть десять единиц «пятых»; поэтому число песчинок, содержащихся в шаре с диаметром в мириаду стадий, будет меньше десяти единиц чисел «пятых».

Шар, диаметр которого сто мириад стадий, равен сто мириад раз взятому шару с диаметром в мириаду стадий.

Итак, если бы был шар песку с диаметром в сто мириад стадий, то ясно, что число его песчинок было бы меньше произведения десяти единиц

«пятых» на сто мириад. Так как десять единиц «пятых» есть тридцать четвертый пропорциональный член от единицы, а сто мириад — седьмой того же ряда от единицы, то ясно, что произведение их будет сороковым членом того же ряда от единицы. Но из этих сорока членов первые восемь, включая единицу, принадлежат к числам, называемым «первыми», следующие восемь к называемым «вторыми», следующие за ними восемь к называемым «третьими», следующие за третьими к называемым «четвертыми», а следующие за четвертыми к называемым «пятыми», причем последний из них есть тысяча мириад чисел «пятых»; поэтому ясно, что число песчинок, содержащихся в шаре, диаметр которого сто мириад стадий, будет меньше тысячи мириад чисел «пятых».

Шар с диаметром в мириаду мириад стадий равен сто мириад раз взятому шару, имеющему в диаметре сто мириад стадий. Следовательно, если бы был шар с диаметром в мириаду мириад стадий, то ясно, что число песчинок было бы меньше произведения тысячи мириад чисел «пятых» на сто мириад. А так как тысяча мириад чисел «пятых» есть сороковой пропорциональный член, считая от единицы, а сто мириад — седьмой того же ряда от единицы, то произведение их будет того же ряда сорок шестой член от единицы.

Но в этих сорока шести членах первые восемь, включая единицу, относятся к числам, называемым «первыми», следующие восемь к называемым «вторыми», еще следующие восемь к называемым «тре-

тьими», следующие за третьими восемь к называемым «четвертыми», следующие за четвертыми восемь к называемым «пятыми», а остальные шесть к называемым «шестыми», причем последний из них есть десять мириад чисел «шестых». Поэтому число песчинок, содержащихся в шаре, диаметр которого мириада мириад стадий, будет меньше десяти мириад чисел «шестых».

Шар с диаметром в сто мириад мириад стадий равен сто мириад раз взятому шару с диаметром в мириаду мириад стадий. Следовательно, если бы был шар песку с диаметром в сто мириад мириад стадий, то число песчинок было бы меньше произведения десяти мириад чисел «шестых» на сто мириад. Так как десять мириад чисел «шестых» есть сорок шестой пропорциональный член, считая от единицы, а сто мириад — седьмой того же ряда от единицы, то произведение их будет пятьдесят второй член того же ряда от единицы. Но из этих пятидесяти двух членов первые сорок восемь, включая единицу, относятся к числам, называемым «первыми», «вторыми», «третьими», «четвертыми», «пятыми» и «шестыми», а остальные четыре к числам «седьмым», причем последний из них есть тысяча единиц чисел «седьмых», откуда следует, что число песчинок, содержащихся в шаре с диаметром в сто мириад мириад стадий, будет меньше тысячи единиц чисел «седьмых».

Так как доказано, что диаметр мира составляет меньше чем сто мириад мириад стадий, то ясно,

что число песчинок, содержащихся в шаре, равном миру, меньше тысячи единиц чисел «седьмых». Следовательно, доказано, что число песчинок, содержащихся в шаре, равном тому, каким представляет себе шар мира большая часть астрономов, будет меньше тысячи единиц чисел «седьмых».

Теперь мы докажем, что число песчинок, заключающихся в шаре, равном по величине шару неподвижных звезд, или небесному, предполагаемому Аристархом, будет меньше тысячи мириад чисел «восьмых».

Действительно, если допустить, что земля имеет к шару, называемому миром, то же отношение, как этот последний к шару неподвижных звезд, предполагаемому Аристархом, и если диаметры этих шаров имеют взаимное отношение, то, раз доказано, что диаметр мира меньше мириады раз взятого диаметра земли, ясно, что диаметр шара неподвижных звезд будет меньше мириады раз взятого диаметра мира.

Но шары находятся в отношении кубов своих диаметров, поэтому шар неподвижных звезд, предполагаемый Аристархом, будет меньше, чем мириада мириад раз мириад взятый шар мира.

Но доказано, что число песчинок, заключающихся в шаре, равном шару мира, меньше тысячи единиц чисел «седьмых». Поэтому, если бы был шар песку такой величины, каким Аристарх предполагает шар неподвижных звезд, то число песчинок было бы меньше произведения тысячи единиц чисел «седьмых» на мириаду мириад раз мириад.

Так как тысяча единиц чисел «седьмых» есть пятьдесят второй пропорциональный член, считая от единицы, а мириада мириад раз мириад — тринадцатый того же ряда от единицы, то произведение их будет шестьдесят четвертый член того же ряда.

Но это число есть восьмое чисел «восьмых», т. е. означает тысячу мириад чисел «восьмых».

Следовательно, ясно, что число песчинок, заключающихся в шаре неподвижных звезд, предполагаемом Аристархом, будет меньше тысячи мириад чисел «восьмых» [20].

Государь! Сказанное мною покажется, конечно, невероятным многим из тех, кто не изучал математики, но будет достоверно, потому что доказано, для тех, кто ею занимался, если внимательно рассмотреть все сказанное мною о расстояниях и величине земли, солнца, луны и всей вселенной.

Впрочем, я со своей стороны нахожу, что было бы полезно, если бы и другие расследовали этот предмет еще обстоятельнее.



КОММЕНТАРИИ

1. Архимед имеет в виду свое недошедшее до нас сочинение «ἀρχαί» арифметического содержания. В то время как мы располагаем относительно достаточным количеством сочинений древних греков по геометрии, арифметические трактаты их до нас, к великой потере для науки, не дошли. Арифметикой греки называли, собственно, учение о свойствах чисел, а практическая арифметика в нашем обычном смысле носила у них название логистики. Все, что касается этой последней, почерпнуто из комментарий Эвтокия Аскалонского к сочинению Архимеда «Об измерении круга» и Теона к «Синтаксису» Птолемея. Знаменитый французский астроном Даламбер написал на эту тему прекрасную работу «Sur l'Arithmétique des Grecs», впервые приложенную к сочинениям Архимеда, изданным Пейраром (1807 г.). В расширенном виде она вошла в состав второй части «Истории древней астрономии» Даламбера, 1817 г.

Он дает целый ряд примеров тому, как греки производили арифметические действия.

В конце VIII в. до н. эры в Греции вошла в употребление так называемая Милетская система нумерации, состоявшая в том, что были использованы 26 букв алфавита, причем для удобства обозначений ввели еще букву «цаде», вышедшую из употребления. Согласно этой системе первые девять букв в алфавитном порядке служили для обозначения простых единиц, следующие девять означали десятки, а последние девять — сотни.

Alpha	α	1	Iota	ι	10	Rho	ρ	100
Beta	β	2	Kappa	κ	20	Sigma	σ	200
Gamma	γ	3	Lambda	λ	30	Taku	τ	300
Delta	δ	4	My	μ	40	Ypsilon	υ	400
Epsilon	ε	5	Ny	ν	50	Phi	φ	500
Vav	ς	6	Xi	ξ	60	Chi	χ	600
Zeta	ζ	7	Omikron	ο	70	Psi	ψ	700
Heta	η	8	Pi	π	80	Omega	ω	800
Theta	ϑ	9	Qoppa	q	90	Zado	d	900

Чтобы не спутать букв с числами, в последнем случае над буквой писали черту. Например: $\overline{\lambda\varepsilon} = 35$, $\overline{\varphi\pi\alpha} = 581$ и т. д. Для обозначения тысяч, перед цифрами единиц, т. е. от α до ϑ, внизу слева ставили нечто вроде нашей запятой, например: $\overline{\gamma{,}\tau\mu\beta} = 3342$. Число 10 000 обозначалось заглавной буквой M числительного Μύριοι (мириада) или просто точкой. Мы не имеем особого термина для 10 000, и греки наше число 328 635 прочли бы так: 32 мириады восемь тысяч шесть сотен три десятка пять единиц.

Вот пример сложения, заимствованный у Эвтокия Аскалонского:

ωμζ.,γϑκα	+	8 473 421
ν.,ηυ		508 400
ωη.,αωκα		8 981 821

Даламбер справедливо заметил, что сложение отвлеченных чисел греки производили совершенно так же, как мы складываем именованные числа (по десятичной системе мер).

2. Мысль Аристарха вполне современная: он считает радиус земной орбиты как бы исчезающе малым в сравнении с радиусом шара неподвижных звезд.

Аристарх, родом из Самоса, один из виднейших греческих астрономов, жил в первой половине III в. до н. эры. Бо́льшая часть его сочинений до нас не дошла, за исключением весьма ценного трактата «О размерах и взаимных расстояниях солнца и луны», впервые отпечатанного на латинском языке в Вене-

ции в 1589 г.[1], а на греческом изданного Валлисом в Оксфорде в 1688 г. Аристарх, имея в общем верное представление о бесконечности вселенной и месте, занимаемом в небесном пространстве земным шаром, является до некоторой степени предвозвестником учения Коперника.

3. Греческая стадия равна 504 английским футам и $4^1/_2$ дюймам. В стадии было 9600 (греческих) дюймов.

4. Триста мириад стадий составляет приблизительно 459 916 *км*, а земля, как известно, считая радиус ее в 6400 *км*, имеет в окружности только 40 228 *км*.

5. Диаметр солнца в 109 раз больше диаметра земли, а этот последний в 4 раза больше лунного диаметра, следовательно, диаметр солнца в 436 раз больше диаметра луны.

6. Аристарх нашел, что когда видна половина лунного диска, угол между солнцем и луной содержит 87°. Но когда половина освещенной части луны обращена к земле линии, соединяющие центр луны с центрами солнца и земли, перпендикулярны. Таким образом в треугольнике, вершины которого в центрах солнца, луны и земли, все углы известны; следовательно, можно определить отношение гипотенузы к катету, т. е. отношение расстояний солнца и луны от земли. Вот как Аристарх определил это отношение: пусть T есть центр земли, L — центр луны и S — центр солнца, что соответствует первой четверти луны, так как $SL \perp TL$ (черт. 13).

Согласно наблюдениям Аристарха дуга SD содержит 87°, следовательно, дуга DE содержит 3°. Проведем линию TG под углом в $22^1/_2°$ к TE.

Тогда так $22^1/_2° = \frac{1}{4}d$, а $3° = \frac{1}{30}d$, то отношения дуг IE к DE будет

$$IE : DE = \frac{1}{4} : \frac{1}{30} = 15 : 2;$$

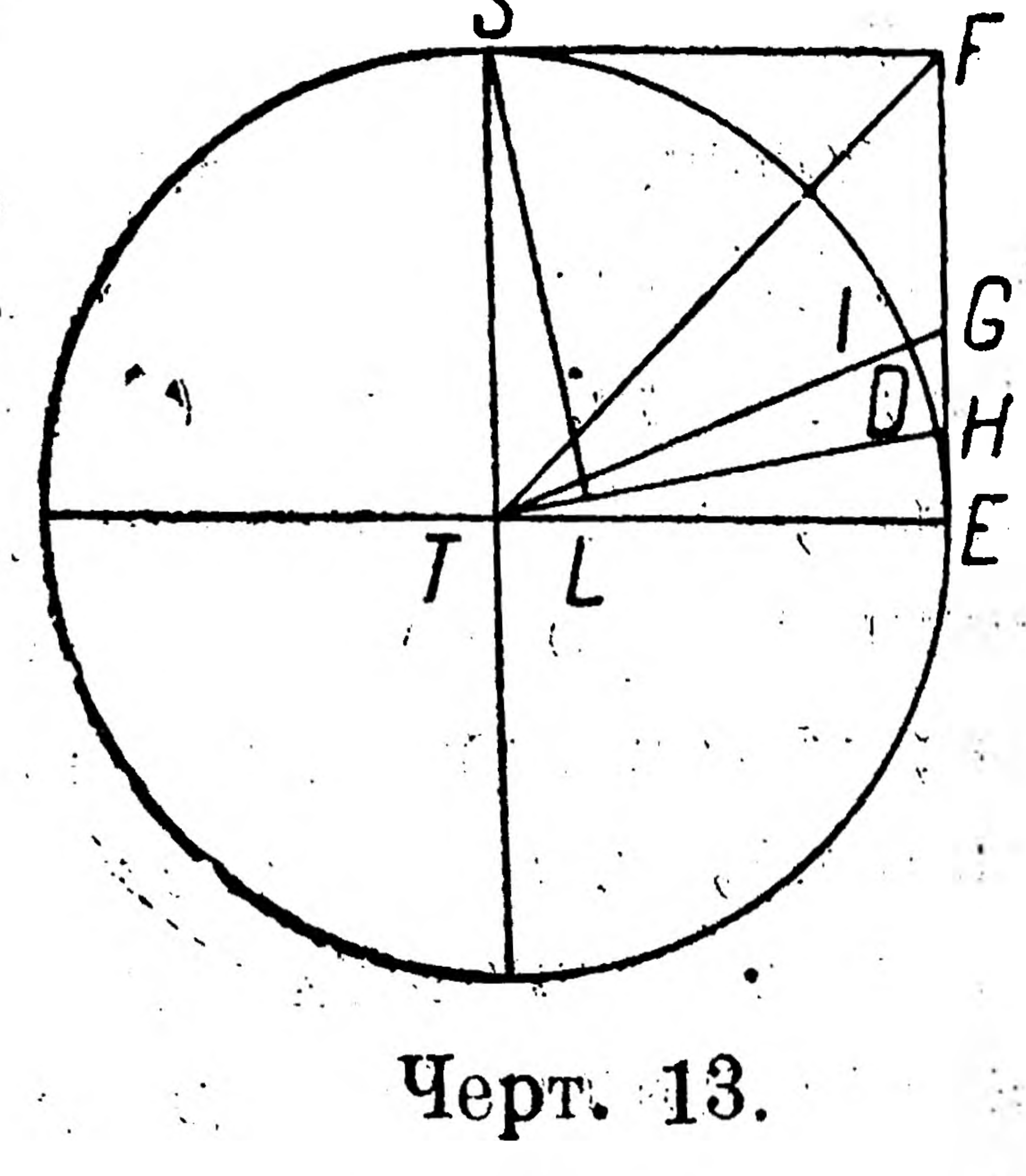
но отношение отрезков GE и EH больше отношения дуг и значит:

$$GE : EH > IE : DE,$$

$$GE : EH > 15 : 2.$$

[1] В VI книге «Математического собрания» (Συναγωγὴ μαθηματική) Паппа Александрийского.

Квадрат, построенный на диагонали TF, вдвое более квадрата, построенного на TE или EF. Но в $\triangle ETF$ линия TG биссектриса угла ETF, поэтому $TF:TE=FG:GE$, следовательно, квадрат, построенный на FG, вдвое более квадрата, построенного на GE, т. е. отношение квадратов, построенных на этих линиях, немного более $\frac{49}{25}$, поэтому отношение прямых FG и GE немного более $\frac{7}{5}$, откуда отношение $FE:GE > \frac{12}{5}$ или, что то же, $FE:GE > 36:15$. Но мы видели, что $GE:EH > 15:2$, стало быть, $FE:EH > 18$, или EH менее $\frac{1}{18} FE$, а так как $FE < TH$, то EH менее $\frac{1}{18} FE$ и менее $\frac{1}{18} TH$. Из подобия треугольников SLT и TEH следует, что $EH:TH=LT:ST$, откуда LT менее $\frac{1}{18} ST$. Аналогично Аристарх доказывает, что LT более $\frac{1}{20} ST$, и заключает, что расстояние солнца от земли превышает расстояние луны от земли не более чем в 20 раз и не менее чем в 18 раз.



Черт. 13.

Метод Аристарха в определении отношения лунного и солнечного расстояний есть первый по времени и удачный по результатам шаг в области математической астрономии древних. Хотя результат, полученный Аристархом, далеко не точен, но чисто геометрическая основа рассуждений безусловно верна.

Из этих отношений расстояний Аристарх выводит отношения размеров солнца и луны и находит, что истинный диаметр солнца также не менее чем в 18 и не более чем в 20 раз превышает лунный диаметр. Чтобы получить такой результат, он должен был считать видимые диаметры солнца и луны одинаковыми. Если так, то свидетельство Архимеда, что Аристарх

считал видимый диаметр солнца равным $\frac{1}{720}$ его орбиты, несколько противоречит тому месту сочинения Аристарха, где он говорит: «Lunam subtendere quintam decimam partem signi», т. е. $\frac{1}{180}$ часть ее пути. Во всяком случае, мы должны признать утверждение Архимеда правильным.

7. $\frac{1}{720}$ часть орбиты составляет $\frac{1}{720} \cdot 360° = 30'$. В действительности угловой диаметр солнца непрерывно изменяется: в перигее (19 декабря — 1 января) он равен $32'32''$, в апогее (19 июня — 1 июля) он равен $31'28''$.

8. Так как $90° = 5400' = 324\,000''$, то

$$\frac{1}{164}\ d = 32'55''{}^{25}/_{41}, \text{ а } \frac{d}{200} = 27'.$$

9. Если центр солнца на горизонте, то ΔK, как касательная, перпендикулярна радиусу $H\Delta$ и потому $HK > \Delta K$. Когда солнце поднимется, то угол $H\Delta K$ при новом положении центра солнца (K_1) станет тупым, а угол ΔHK_1 будет меньше угла ΔHK, следовательно, подавно $HK_1 > \Delta K_1$.

10. В треугольниках ΔNK и $H\Phi K$ углы при точках N и Φ прямые, сторона $KN = K\Phi$, а $\Delta K < HK$, следовательно, $\angle N\Delta K > \angle \Phi HK$, откуда $\angle \Lambda\Delta O > \angle \Pi H P$.

11. Если длина окружности есть C, а длина ее диаметра D, то

$$\frac{C}{D} < \frac{22}{7},$$

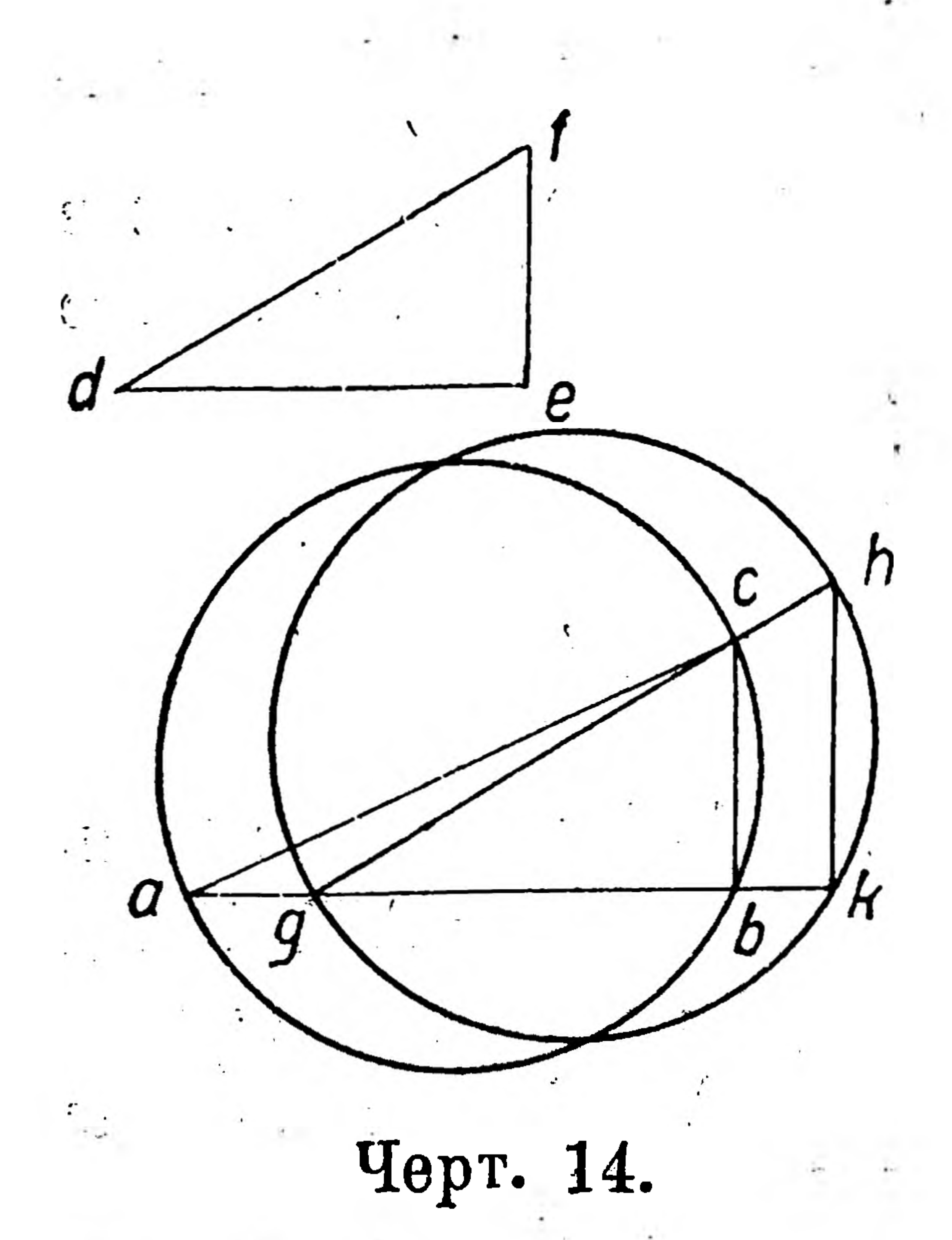
но периметр P вписанного многоугольника меньше окружности т. е. $P < C$, следовательно, подавно

$$\frac{P}{D} < \frac{22}{7},$$

или, так как $D = 2R$, где R радиус, отношение

$$\frac{P}{R} < \frac{44}{7}.$$

12. Так как отношение периметра вписанного 656-угольника к радиусу $KH < \frac{44}{7}$, то отношение стороны его к радиусу меньше отношения $\frac{44}{656 \cdot 7} = \frac{11}{1148}$. Но AB меньше стороны, следовательно, отношение $\frac{AB}{HK}$ подавно меньше $\frac{11}{1148}$. А так как $\frac{11}{1148} < \frac{1}{100}$, то и $\frac{AB}{HK} < \frac{1}{100}$ и $AB < \frac{HK}{100}$.



Черт. 14.

13. Диаметр круга ΣT меньше $\frac{1}{100} HK$, поэтому $HI + K\Sigma$ меньше $\frac{1}{100} HK$, следовательно, $I\Sigma$ больше $\frac{99}{100} HK$, и отношение

$$\frac{HK}{I\Sigma} < \frac{100}{99}.$$

14. Пусть $HK = c$, $\Sigma I = d$, $\Phi H = a$, $\triangle O = b$. Из построения (черт. 14) следует:

$$a < c \text{ и } b > d$$

По доказанному ранее:

$$\frac{HK}{\Sigma I} = \frac{c}{d} < \frac{100}{99},$$

а значит и подавно

$$\frac{H\Phi}{\triangle O} = \frac{a}{b} < \frac{100}{99}$$

15. Пусть даны 2 треугольника abc и edf, у которых катеты bc и ef равны, а $de < ab$ и, следовательно, $\angle bac < \angle edf$.

Требуется доказать, что $\frac{ac}{df} < \frac{\angle edf}{\angle bac} < \frac{ab}{de}$.

Отложим на стороне ab (черт. 14) отрезок $bg = de$ и соединим точки c и g. Тогда $cg = df$ и $\angle cgb = \angle edf$. Продолжив cg, отложим $gh = ac$.

Опустим из точки h перпендикуляр hk на продолжение ab и на ac и gh опишем, как на диаметрах, окружности, которые пройдут через точки b и k, потому что углы cba и hkg — прямые.

Так как $ac = gh$, то обе окружности равны. Так как

$$\frac{\smile hk}{\smile cb} > hk$$

и, кроме того,

$$\frac{\smile hk}{\smile cb} = \frac{\angle hgk}{\angle cab},$$

то

$$\frac{\angle hgk}{\angle cab} > \frac{hk}{cb},$$

или

$$\frac{\angle fde}{\angle cab} > \frac{hk}{cb}.$$

Черт. 15.

Но треугольники gcb и gkh подобны, следовательно,

$$\frac{hk}{cb} = \frac{hg}{cg} = \frac{ac}{df},$$

следовательно,

$$\frac{\angle fde}{\angle cab} > \frac{ac}{df}.$$

Отложим затем (черт. 15) на стороне ab треугольника abc отрезок $ar = de$ и в точке r восставим к прямой ab перпендикуляр $rs = ef$ и соединим точки a и s. Тогда $as = df$ и $\angle sar = \angle fde$. Точка пересечения прямых ac и rs пусть будет u. Опишем радиусом au дугу vt. Тогда отношение сегментов $\frac{vau}{tau} = \frac{\angle vau}{\angle tau}$. Но $\triangle aru$ меньше сегмента tau, поэтому $\frac{\text{сегм. } vau}{\text{сегм. } tau} < \frac{\text{сегм. } vau}{\triangle aru}$, следовательно, $\frac{\angle vau}{\angle tau} < \frac{\text{сегм. } vau}{\triangle aru}$,

но $\triangle sau$ больше сегмента vau, вследствие чего $\frac{\angle vau}{\angle tau} < \frac{\triangle sau}{\triangle aru}$, но у треугольников sau и rau высота ar — общая, следовательно,

$$\frac{\triangle sau}{\triangle aru} = \frac{su}{ru},$$

откуда

$$\frac{\angle vau}{\angle tau} < \frac{su}{ru} \text{ или } \frac{\angle vau + \angle tau}{\angle tau} = \frac{\angle vat}{\angle tau} < \frac{su + ru}{ru},$$

или

$$\frac{\angle fde}{\angle cab} < \frac{rs}{ru},$$

но

$$rs = ef = bc;$$

из подобия треугольников aru и abc имеем:

$$\frac{cb}{ru} = \frac{ab}{ar} = \frac{ab}{de},$$

так как $ar = de$; следовательно,

$$\frac{\angle fde}{\angle cab} < \frac{ab}{de}.$$

16. ... т. е. меньше отношения $\frac{100}{20\,000}$ к $\frac{99}{20\,000}$.

17. ... так как $\frac{99}{20\,000} = \frac{1}{202 + \frac{2}{99}} > \frac{1}{203}$.

18. Переведем для ясности систему архимедовых чисел на десятичную нумерацию:

I период	числа «первые»:	$1\ (10^0),\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3$	
		$10^4,\ 10^5,\ 10^6,\ 10^7$	(1-я октада)
	» «вторые»:	$10^8, \ldots, 10^{15}$	(2-я октада)
	» «третьи»:	$10^{8\cdot 2}, \ldots, 10^{23}$	(3-я октада)
	» «четвертые»:	$10^{8\cdot 3}, \ldots, 10^{31}$	(4-я октада)
			
		$10^{8\cdot 10^8}, \ldots,$ октада чисел октадных	

По Архимеду число $10^7 = 10^3 \cdot 10^4 = 1000.\ 10\,000$ (тысяча мириад), число $10^{15} = 10^7 \cdot 10^8$ — тысяча мириад «вторых» чисел, число $10^{16} = 10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^8 = 10\,000.\ 10\,000 \cdot 10^8$ — мириада мириад «вторых» чисел, $10^{23} = 10^7 \cdot 10^{16} = 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{2\cdot 8} = 1000.$ $10\,000 \cdot 10^{2\cdot 8}$ — тысяча мириад «третьих» чисел и т. д.

Структура периодов:

Единица «первых» чисел II периода — $10^{8\cdot 10^8}$; следовательно,

$$10^{8\cdot 10^8},\ 10^{8\cdot 10^8+1},\ 10^{8\cdot 10^8+2}\ \ldots\ 10^{8\cdot 10^8+7}\ \text{(1-я октада)}$$
$$10^{8\cdot 10^8+8},\ \ldots\ 10^{8\cdot 10^8+15}\ \text{(2-я октада)}$$

$10^{8\cdot 10^8+8}$ — октада «первых» чисел второго периода — есть единица «вторых» чисел того же периода.

Единица III периода: $10^{2\cdot 8\cdot 10^8}$

Единица IV периода: $10^{3\cdot 8\cdot 10^8}$

Единица V периода: $10^{4\cdot 8\cdot 10^8}$

. . . .

Единица $(n+1)$-го периода: $10^{n\cdot 8\cdot 10^8}$

Предел, на котором останавливается Архимед, есть октада чисел октадных октадного периода — $10^{10^8\cdot 8\cdot 10}$.

Это есть единица (10^8+1)-го периода.

19. Здесь Архимед берет геометрическую прогрессию, первый член которой есть единица.

$$\div\div\ 1,\ 9,\ 9^2,\ 9^3,\ 9^4,\ 9^5,\ 9^6,\ 9^7,\ 9^8,\ 9^9,\ 9^{10}\ \ldots$$
$$a_4 = 9^3$$
$$a_8 = 9^7$$

Очевидно, что $a_4 a_8 = 9^{10} = a_{11} =$ (8+3) и $a_4 = a_{(1+3)}$, т. е. a_{11} удален от a_8 настолько же, насколько a_4 от единицы. Притом $11 = (4+8) - 1$.

Вообще $a_k = 9^{k-1} = a_{(1+k-1)}$

$$a_m = 9^{m-1},$$

следовательно,

$$a_k \cdot a_m = 9^{k-1+m-1} = 9^{k+m-2} = a_{k+m-1} = a_{m+(k-1)}.$$

Член a_k удален от единицы на $k-1$ членов, член a_{k+m-1} удален от единицы на $k+m-2$ члена; так как a_m удален от

единицы на $m-1$ член, то член a_{k+m-1} удалён от члена a_m на $k+m-2-(m-1)=k-1$ член.

Второе свойство очевидно: достаточно взглянуть на индексы

$$k+m-1=(k+m)-1.$$

20. Переведем для ясности вычисления Архимеда на привычные для нас.

Количество песчинок в объеме макового зернышка не больше 10^4. Диаметр его не более $\frac{1}{40}$ дюйма. Шар с диаметром в дюйм содержит не более $40^3=64\,000=6$ мириад 4 тысячи маковых зерен. Следовательно, в этом шаре не более $10^4\cdot 64\cdot 10^4$ песчинок и, следовательно, менее $10\cdot 10^8$, т. е. десяти единиц чисел «вторых».

Шар с диаметром в 100 дюймов равен $100^3=100\cdot 10\,000$ шаров с диаметром в дюйм, следовательно, песчинок в нем менее, чем $100\cdot 10\,000\cdot 10\cdot 10^8$, или 10^{15} (тысяча мириад чисел «вторых» $10^3\cdot 10^4\cdot 10^8$). Шар с диаметром в мириаду дюймов в $100^3=100$ мириад раз больше шара с диаметром в 100 дюймов следовательно, песчинок в нем менее, чем $100\cdot 10\,000\cdot 10^{15}=$ $=10^{21}$ (десять мириад чисел «третьих» — $10\cdot 10^4\cdot 10^{2\cdot 8}$).

Стадия $=9600$ дюймов, т. е. стадия меньше мириады дюймов. Шар с диаметром в стадию меньше шара с диаметром в мириаду дюймов, следовательно, число песчинок в шаре с диаметром в стадию меньше 10^{21}.

Шар с диаметром в 100 стадий $=100$ мириад шаров с диаметром в стадию. Следовательно, песчинок в нем менее, чем $100\cdot 10\,000\cdot 10^{21}=10^{27}$ (тысяча единиц чисел «четвертых» — $1000\cdot 10^{3\cdot 8}$).

Шар с диаметром в мириаду стадий $=100$ мириад шаров с диаметром в 100 стадий, следовательно, песчинок в нем менее, чем $100\cdot 10\,000\cdot 10^{27}=10^{33}$ (десять единиц чисел «пятых» — $10\cdot 10^{4\cdot 8}$).

Шар с диаметром в 100 мириад стадий $=100$ мириад шаров с диаметром в мириаду стадий, следовательно, песчинок в нем менее, чем $100\cdot 10\,000\cdot 10^{33}=10^{39}$ (тысяча мириад чисел «пятых» — $1000\cdot 10^4\cdot 10^{4\cdot 8}$).

Шар с диаметром в мириаду мириад стадий равен сто мириад шаров с диаметром в 100 мириад стадий, следовательно, песчинок в нем менее, чем $100 \cdot 10\,000 \cdot 10^{39} = 10^{45}$ (десять мириад чисел «шестых» — $10 \cdot 10^4 \cdot 10^{5 \cdot 8}$).

Шар с диаметром 100 мириад мириад стадий = 100 мириад шаров с диаметром мириада мириад стадий, следовательно, песчинок в нем менее, чем $100 \cdot 10\,000 \cdot 10^{45} = 10^{51}$ (тысяча единиц чисел «седьмых» — $1000 \cdot 10^{6 \cdot 8}$).

Диаметр шара мира меньше ста мириад мириад стадий, поэтому число песчинок в шаре мира меньше 10^{51}.

Диаметр шара неподвижных звезд меньше мириады диаметров шара мира. Поэтому шар неподвижных звезд меньше мириады в кубе $(10^4)^3$, или 10^{12} шаров мира. Следовательно, число песчинок в нем меньше, чем $10^{12} \cdot 10^{51} = 10^{63}$ (тысяча мириад чисел «восьмых» — $1000 \cdot 10^4 \cdot 10^{7 \cdot 8}$).

Основанием деления чисел на октады, повидимому, послужило то обстоятельство, что с помощью греческих 27 цифр наибольшее написанное число будет $10^8 - 1$. Поэтому Архимед и берет следующее за этим число 10^8 в качестве новой единицы и строит свою систему по принципу «поместного значения».

СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕВОДАХ И ПЕЧАТНЫХ ИЗДАНИЯХ СОЧИНЕНИИ АРХИМЕДА

Прежде всего мы должны упомянуть Эвтокия Аскалонского, ученика Исидора Милетского (VI век). Ему принадлежат комментарии к сочинениям Архимеда: «О шаре и цилиндре», «Квадратура параболы», «Об измерении круга» и «О равновесии плавающих тел». Его комментарии ценны обилием исторического материала, например в пояснениях к трактату «О шаре и цилиндре» он излагает одиннадцать решений известной задачи «Об удвоении куба», данных древними авторами.

Впервые они изданы в 1544 г. в Базеле в качестве приложения к сочинениям Архимеда под заглавием «Eutocii Ascalonitae in Archimedis libros de sphaera et cylindro, atquae alios quosdam, Commentaria, nunc primum et qraece et latine in lucem edita». Новое издание, см. ниже (издание сочинений Архимеда проф. Гейбергом).

Первые переводы трактатов Архимеда на арабском языке: «О шаре и цилиндре с комментариями Евтокия» перевел Исгак-ибн-Гонейн (ум. 910 г.). Знаток греческого языка, он не был однако, математиком, поэтому выдающийся переводчик и математик Табит-ибн-Корра (род. 836 г.) давший ряд переводов творений Эвклида, Птолемея, Аполлония, Феодосия и Архимеда, исправил чисто математическую сторону переводов Исгак-ибн-Гонейна.

Ему самому принадлежит перевод трактата «Об измерении круга».

Первоначально арабы ознакомились со многими трудами древних греков не по оригиналам, а по сирийским и пехлевийским переводам. Часть греческих рукописей по желанию калифа Аль-Мамуна (813—833) была доставлена в Багдад византийским императором Михаилом III.

Имеются переводы Архимеда и на еврейском языке. Калонимос-ибн-Калонимос (1306 г.) перевел трактат «О коноидах и сфероидах», вероятно, с арабского перевода Коста-ибн-Луки (864—923), хотя арабские библиографы об этом переводе не упоминают.

Неизвестный переводчик (по мнению Штейншнейдера, тот же Калонимос) дал на еврейском языке трактат «Об измерении круга», воспользовавшись арабским переводом Табит-ибн-Корра.

Одним из древнейших латинских переводов является перевод трактата «О плавающих телах» доминиканского монаха В. Мёрбека (XIII в.). Позднее греческие рукописи сочинений Архимеда вообще появлялись прежде всего в Италии после взятия Константинополя.

Из печатных собраний сочинений Архимеда первое вышло в 1543 г. в Венеции, изданное известным итальянским математиком Тарталья на греческом и латинском языках. Перевод «De insidentibus influido» был сделан по греческому оригиналу, бесследно затем пропавшему, и только недавно, благодаря находке Константинопольского палимпсеста, явилась возможность ознакомиться с греческим текстом.

В 1544 г. вышло базельское издание (с греческим и латинским текстом): Archimedis opera et Eutocii commentar. Ex ecensione Th. Venatorii.

В 1558 г. появилось издание в Венеции с ценными комментариями Коммандино: Archimedis opera nonnulla a Federico Commandino urbinate nuper in latinum conversa et commentariis illustrata, in folio. Содержит трактаты: «Об измерении круга», «О спиралях», «О квадратуре параболы», «О коноидах и сфероидах», «Псаммит».

Между 1550—1560 гг. известный математик Мавролико издал сочинения Архимеда, но все издание погибло, за исключе-

нием двух экземпляров. Спустя сто с лишком лет оно было перепечатано в Палермо: Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica ex tant, ex traditione doctissimi viri Francissi, Maurolici, Panormi, in folio, 1685 г. В сущности, это был не перевод, а переработка оригинала в целях облегчить его понимание.

В 1669 г. в Англии вышло издание известного математика Валлиса, в 1675 г. сокращенный перевод Варроу.

Одним из самых ценных по полноте содержания и многочисленным комментариям является оксфордское издание ученого итальянца Торелли, из Вероны: Archimedis quae Supersunt omnia, cum Eutocii ascalonitae commentariis. Ex recensione Josephi Torelli, Veronensis, cum nova versione latina. 1792 г.

Также заслуживает внимания французское издание Пейрара: Oeuvres d'Archimède, traduites litteralement, avec un commentaire, par. F. Peyrard, Paris, 1807 г. в 1 томе in 4⁰, 1808 г. в 2 томах in 8⁰. Переиздано в 1844 г.

На немецкий язык переведены и комментированы сочинения Архимеда в 1824 г. Ницце: Archimedes Werke, aus d. griech. übersetzt und mit erläuterungen und kritischen Anmerkungen, begl. von Nizze, Штральзунд.

Одно из новых изданий (1807 г.) — английское (Хисz) в духе современных обозначений: Archim. Edition in modern notation w. introd. chapters, by. T. L. Heath, Cambridge.

Безусловно лучшее из всех существующих — издание проф. Гейберга: Archimedis opera omnia, edidit J. L. Heiberg в 3 томах (1880 — 1881).

Второе — Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, Лейпциг (1910—1913). Греческий текст с латинским переводом, 2 тома. Третий том, содержащий комментарии Евтокия, кажется, еще не вышел.

Переводы сочинений Архимеда на русском языке:

1. Ф. ПЕТРУШЕВСКИЙ, Архимеда две книги «О шаре и цилиндре», «Измерение круга» и «Леммы», 1823 г.

2. Ф. ПЕТРУШЕВСКИЙ, «Архимеда Псаммит, или исчисление песку в пространстве, равном шару неподвижных звезд», 1824 г.

Обе — библиографическая редкость.

3. ПРОФ. ВАЩЕНКО-ЗАХАРЧЕНКО, перевод трактата «Об измерении круга» в приложении к переводу «Начал» Эвклида 1880 г.

4. ПРОФ. Ф. РУДИО, «О квадратуре круга» (Архимед, Гюйгенс, Лежандр, Ламберт), перев. под ред. С. Бернштейна, изд. Матезис, 1911 г. Содержит перевод трактата «Об измерении круга».

5. ПРОФ. ГЕЙБЕРГ, «Новое сочинение Архимеда. Послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах механики», изд. Матезис, 1909 г. С предисловием И. Ю. Тимченко, «Архимед и его новооткрытое произведение».

6. Г. Н. ПОПОВ, «Псаммит Архимеда (исчисление песчинок)», кн-во «Сеятель» Е. В. Высоцкого, Птг. 1922. С комментариями и кратким очерком научной деятельности Архимеда.

СОДЕРЖАНИЕ
